Die

# semicubische oder Neil'sche Parabel,

## ihre Sekanten und Tangenten.

## Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt

der philosophischen Facultät

der Universität Rostock

von

**August Pein**

aus Tempelburg in Pommern.

*Mit einer Figurentafel.*

Druck von Wilh. Stumpf in Bochum.

1875.

Die

# semicubische oder Neil'sche Parabel,

## ihre Sekanten und Tangenten.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt

der philosophischen Facultät

der Universität Rostock

von

**August Pein**

aus Tempelburg in Pommern.

*Mit einer Figurentafel.*

Druck von Wilh. Stumpf in Bochum.

1875.

Herrn

**Grabs von Haugsdorf**

Ritter des rothen Adlerordens dritter Klasse mit der Schleife

auf

**Poln. Fuhlbeck in Westpreussen**

widmet diese Schrift

als Zeichen aufrichtiger Verehrung und Dankbarkeit

*der Verfasser.*

# Die

# semicubische oder Neil'sche Parabel,

# ihre Sekanten und Tangenten.

# Inhalt.

## Erstes Kapitel.

### *Die semicubische oder Neil'sche Parabel.*


| | | Seite |
|---|---|---|
| §. 1. | Die Evolute der Apollonischen Parabel ist die semicubische Parabel | 1 |
| §. 2. | Construction von Punkten der Neil'schen Parabel mit Hülfe der Apollonischen . . . . . | 3 |
| §. 3. | Gemeinschaftliche Punkte der Apollonischen Parabel und ihrer Evolute | 4 |
| §. 4. | Gestalt der Neil'schen Parabel . . . . . | 6 |
| §. 5. | Der Rückkehrpunkt und der Wendepunkt der Neil'schen Parabel . | 7 |
| §. 6. | Die Gleichung der Neil'schen Parabel in Polar-Coordinaten . . . | 9 |
| §. 7. | Die Neil'sche Parabel ist eine Curve vom Geschlecht Null oder eine Unicursal-Curve . . . . . | 10 |
| §. 8. | Die Neil'sche Parabel als geometrischer Ort der Schnittpunkte eines Strahlenbüschels und eines demselben projectivischen Kegelschnittbüschels . . . . . | 11 |
| §. 9. | Construction von Punkten der Neil'schen Parabel, wenn der Rückkehrpunkt, die Rückkehrtangente und der Parameter gegeben sind | 12 |
| §. 10. | Bedeutung der Ungleichungen: $p y^2 \gtrless x^3$ . . . . . | 13 |


## Zweites Kapitel.

### *Die Sekanten und Tangenten der Neil'schen Parabel.*


| | | |
|---|---|---|
| §. 11. | Gemeinschaftliche Punkte der Neil'schen Parabel und einer Geraden | 14 |
| §. 12. | Fortsetzung. Specielle Fälle . . . . . | 18 |
| §. 13. | Beziehungen zwischen den Coordinaten dreier in einer Geraden liegenden Punkte der Neil'schen Parabel . . . . . | 19 |
| §. 14. | Verhältniss der Producte der Abschnitte der Sekanten . . . . . | 21 |
| §. 15. | Verbindungslinien der Schnittpunkte zweier Sekanten . . . . . | 23 |
| §. 16. | Tangenten der Neil'schen Parabel. Berührungs- und Tangentialpunkt | 24 |
| §. 17. | Tangenten von einem Punkte an die Neil'sche Parabel . . . . . | 27 |
| §. 18. | Fortgesetztes Tangentenziehen . . . . . | 30 |
| §. 19. | Begleiterin und begleitender Punkt einer Geraden . . . . . | 32 |
| §. 20. | Normale der Neil'schen Parabel . . . . . | 34 |
| §. 21. | Länge der Tangente und Normale, Subtangente und Subnormale. Construction der Tangenten . . . . . | 37 |

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553624_0098

# Erstes Kapitel.

## Die semicubische oder Neil'sche Parabel.

### §. 1.

### Die Evolute der Apollonischen Parabel ist die semicubische Parabel.

Die Evolute einer Curve ist bekanntlich die Enveloppe ihrer Normalen oder der geometrische Ort ihrer Krümmungsmittelpunkte.

Aufgabe: Die Evolute der gemeinen oder Apollonischen Parabel zu finden.

1. Auflösung. Die Evolute als Enveloppe der Normalen.

Die Gleichung der Apollonischen Parabel mit dem Halbparameter m in einem rechtwinkeligen Coordinatensysteme der $\xi\ \eta$, dessen Anfang der Scheitel und dessen positive $\xi$-Achse die Achse der Parabel ist, lautet:

$$1) \ldots \eta^2 = 2\,m\,\xi;$$

die Gleichung ihrer Normale im Punkte $\xi_1\ \eta_1$ ist:

$$\eta - \eta_1 = -\frac{\eta_1}{m}(\xi - \xi_1),$$

oder mit Rücksicht auf 1):

$$2) \ldots \eta_1^3 - 2\,m\,\eta_1(\xi - m) - 2\,m^2\eta = 0.$$

Zur Bestimmung der Enveloppe der Normalen aller Punkte der Parabel haben wir aus der Gleichung 2) und aus ihrer ersten Ableitung nach $\eta_1$, nämlich aus:

$$3) \ldots 3\,\eta_1^2 - 2\,m\,(\xi - m) = 0$$

die Grösse $\eta_1$ zu eliminiren. Setzen wir den aus 3) sich ergebenden Werth von $\eta_1$ in 2) ein, so erhalten wir:

$$2\,m^2\eta = {}^4/_3\,m\,(\xi - m)\sqrt{{}^2/_3\,m\,(\xi - m)},$$

oder, wenn wir beide Seiten dieser Gleichung ins Quadrat erheben:

$$4) \ldots {}^{27}/_8\,m\,\eta^2 = (\xi - m)^3$$

als Gleichung der Evolute.

2. Auflösung. Die Evolute als geometrischer Ort der Krümmungsmittelpunkte.

Der Krümmungsmittelpunkt der Apollonischen Parabel 1) im Punkte $\xi_1\ \eta_1$ hat die Coordinaten:

$$5) \ldots \xi = m + 3\,\xi_1\,;\ \eta = -\frac{\eta_1{}^3}{m^2} = -\frac{2\,\xi_1\,\eta_1}{m}.$$

Setzen wir die aus 5) sich ergebenden Werthe von $\xi_1$ und $\eta_1$ in die aus 1) folgende Gleichung $\eta_1{}^2 = 2\,m\,\xi_1$ ein, so erhalten wir, wenn wir noch beide Seiten der erhaltenen Gleichung zur dritten Potenz erheben, als Gleichung der Evolute wieder die Gleichung 4).

Nehmen wir den Punkt: $\xi = m$, $\eta = 0$, zum Anfange eines neuen Coordinatensystems der x y, so ist:

$$\xi = x + m,\ \eta = y,$$

und es ergiebt sich als Gleichung der Apollonischen Parabel:

$$y^2 = 2\,m\,(x + m),$$

und als Gleichung ihrer Evolute, wenn wir noch:

$$6) \ldots {}^{27}/_{8}\ m = p,\ m = {}^{8}/_{27}\ p$$

setzen:

$$7) \ldots p\ y^2 = x^3.$$

Die Evolute der Apollonischen Parabel gehört somit zu den sogenannten Parabeln höherer Art, deren allgemeine Gleichung:

$$p^m\ y^n = x^{m+n}$$

ist. Da nach 7) y durch die $({}^3/_2)^{\text{te}}$ Potenz von x ausgedrückt ist, so heisst die Evolute die semicubische Parabel, parabola cubicalis secunda, parabola semicubica, im Gegensatz zur Parabel:

$$p^2\,y = x^3,$$

welche die cubische, parabola cubicalis genannt wird.

Die semicubische Parabel ist bekanntlich die erste, welche rectificirt worden ist, und zwar von dem englischen Mathematiker William Neil, nach welchem sie auch die Neil'sche Parabel genannt wird. Derselbe machte seine Entdeckung im Jahre 1657 bekannt und erregte dadurch grosses Aufsehen, weil man bis dahin vielfach ganz an der Rectification krummer Linien zweifelte. Zu derselben Zeit fanden auch von Hevraet und Fermat die Rectification der semicubischen Parabel. [1])

---

[1]) Vgl. Klügel, Mathematisches Wörterbuch unter: Cubisch, Evolution, Parabeln höherer Art, Rectification.

## §. 2.

## Construction von Punkten der Neil'schen Parabel mit Hülfe der Apollonischen.

Bevor wir zu der Discussion der Gleichung 7) übergehen, wollen wir einige sich aus dem Obigen ergebende Constructionen von Punkten der Neil'schen Parabel angeben, wobei wir noch daran erinnern, dass der Krümmungsmittelpunkt eines Punktes stets auf seiner Normale liegt, und dass die Normale einer Curve Tangente ihrer Evolute in dem entsprechenden Krümmungsmittelpunkte ist.

Fig. 1. Wenn AX (Fig. 1) die Achse, A der Scheitel, F der Brennpunkt der Apollonischen Parabel und $P_1$ ein Punkt derselben mit den Coordinaten: $\xi_1 = AM_1$, $\eta_1 = P_1M_1$ ist, und wenn wir ferner $M_1N = m = 2\,AF$ machen und $P_1N$ ziehen, so ist bekanntlich $P_1N$ die Normale im Punkte $P_1$.

1. Construction nach der Formel 5) $\xi = m + 3\,\xi_1$. Verlängere $AN = m + \xi_1$ um $NM = 2\,AM_1 = 2\,\xi_1$, so dass $AM = m + 3\,\xi_1$ ist, und errichte in M auf AX die Senkrechte, welche die verlängerte Normale in P schneidet, so ist P ein Punkt der Neil'schen Parabel und NP seine Tangente.

Dieselbe Construction ergiebt sich auch aus der zweiten Formel 5) oder aus der Proportion $m : 2\,\xi_1 = \eta_1 : -\eta$.

Machen wir $AO = 2\,AF = m$, so ist $OM = 3\,\xi_1$, $ON = \xi_1$. Errichten wir nun auf AX in O die Senkrechte OY, welche die Normale $P_1N$ (oder deren Verlängerung) in D schneidet, so ist, da $ON = {}^1/_3\,OM = {}^1/_2\,NM$ ist, auch $DN = {}^1/_2\,NP$. Daraus erhalten wir folgende

2. Construction. Ziehe die Normale $P_1N$, welche die in O auf AM errichtete Senkrechte in D schneidet, und verlängere die Normale über N hinaus um $NP = 2\,DN$, so ist P ein Punkt der Neil'schen Parabel. *)

Fig. 2. Auch der Krümmungshalbmesser R des Punktes $P_1$ liefert uns einfache Constructionen. Es ist bekanntlich:

$$8) \ldots R = \frac{(\sqrt{m^2 + \eta_1^2})^3}{m^2},$$

oder, wenn l die Länge der Normale $P_1N$ ist:

$$R = l^3 : m^2,$$

also, wenn wir $\sphericalangle M_1NP_1 = \alpha$ setzen und berücksichtigen, dass $\sec\alpha = \frac{l}{m}$ ist:

$$9) \ldots R = l \cdot \sec^2\alpha.$$

Da nun bei der Apollonischen Parabel $\sphericalangle FP_1N = \sphericalangle FNP_1 = \alpha$ ist, so erhalten wir die Normale auch, indem wir $FN = FP_1$ machen und $P_1N$ ziehen; und es ergiebt sich weiter folgende

*) Anmerkung. Macht man $P_2N = {}^1/_4\,DN$, so ist auch $P_2$ ein Punkt der Neil'schen Parabel, wie sich aus §. 21 ergiebt.

3. Construction. Errichte in N auf der Normale die Senkrechte, welche den verlängerten Brennstrahl $P_1F$ in E schneidet, und in E zu $P_1E$ die Senkrechte, welche die verlängerte Normale in P schneidet, so ist P der dem Punkte $P_1$ entsprechende Punkt der Evolute, denn es ist:

$$P_1P = P_1E.\ \sec\alpha = P_1N.\ \sec^2\alpha = 1.\ \sec^2\alpha.$$

Da $\sphericalangle\ P_1EN = 1\ R - EP_1N = 1\ R - \alpha$, und $\sphericalangle\ FNE = 1\ R - P_1NF = 1\ R - \alpha$, also $\sphericalangle\ P_1EN = FNE$ ist, so ist auch $P_1F = FN = FE$.

Dadurch wird die Construction des Punktes E einfacher, indem man $P_1F$ um sich selbst über F hinaus bis E verlängert.

Zieht man FG senkrecht zum Brennstrahl, so ist $P_1G = GP$. Man kann daher die Construction auch so anordnen, dass man in F auf dem Brennstrahle $P_1F$ die Senkrechte errichtet, welche die Normale in G schneidet, und $GP = P_1G$ macht.

---

## §. 3.

## Gemeinschaftliche Punkte der Apollonischen Parabel und ihrer Evolute.

Fig. 3. Für den Scheitel der Apollonischen Parabel A ($\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$) erhalten wir aus 5) und 8) für den Krümmungsmittelpunkt die Coordinaten $\xi = m$, $\eta = 0$, den Krümmungsradius $R = m$; somit ist O der entsprechende Krümmungsmittelpunkt.

Die Krümmungsmittelpunkte der beiden Punkte B und D ($\xi_1 = {}^1/_2\ m$, $\eta_1 = \pm m$) (Fig. 3) sind G und E ($\xi = {}^5/_2\ m$, $\eta = \mp m$). Die Verbindungslinien dieser vier Punkte bilden, wie man leicht findet, ein Quadrat mit der Seite 2 m, dessen Diagonale der Krümmungsradius $2\,m\sqrt{2}$ ist.

Den beiden Punkten H und I ($\xi_1 = m$, $\eta_1 = \pm m\sqrt{2}$) entsprechen die beiden Punkte M und L ($\xi = 4\,m$, $\eta = \mp 2\,m\sqrt{2}$) als Krümmungsmittelpunkte. Da $\eta^2 = 8\,m^2 = 2\,m.4\,m = 2\,m\,\xi$ ist, so sind M und L auch Punkte der Apollonischen Parabel.

Die Apollonische und die Neil'sche Parabel haben daher zwei Punkte gemein, nämlich die Krümmungsmittelpunkte derjenigen beiden Punkte der Apollonischen Parabel, welche die doppelte Brennweite zur Abscisse haben. Um zu untersuchen, ob beide Curven noch andere Punkte gemeinschaftlich haben, müssen wir aus den Gleichungen beider diejenigen Werthe der Coordinaten bestimmen, welche beiden gleichzeitig genügen. Für A als Coordinatenanfang der $\xi\,\eta$ lauten die Gleichungen:

$$\eta^2 = 2\,m\,\xi,\ {}^{27}/_{8}\,m\,\eta^2 = (\xi - m)^3,$$

aus denen $(\xi - m)^3 = {}^{27}/_{4}\,m^2\,\xi$, oder

$$10)\ \xi^3 - 3\,m\,\xi^2 - {}^{15}/_{4}\,m^2\,\xi - m^3 = 0$$

folgt, welche Gleichung sich, da $4\,m$ eine Wurzel derselben ist, in der Gestalt: $(\xi - 4\,m)\,(\xi + {}^{1}/_{2}\,m)^2 = 0$ schreiben lässt. Die Gleichung 10) hat demnach zwar noch die beiden gleichen Wurzeln $\xi = -{}^{1}/_{2}\,m$, denselben entsprechen jedoch nach den Gleichungen beider Curven imaginäre Ordinaten.

Nehmen wir O als Coordinatenanfang der x y, so sind die Gleichungen der beiden Parabeln:

$$y^2 = {}^{16}/_{27}\,p\,(x + {}^{8}/_{27}\,p),\ p\,y^2 = x^3,$$

aus denen wir die Gleichung:

$$x^3 - {}^{16}/_{27}\,p^2\,x - {}^{128}/_{729}\,p^3 = 0$$

oder: $(x - {}^{8}/_{9}\,p)\,(x + {}^{4}/_{9}\,p)^2 = 0$

erhalten.

Wir sehen hieraus, dass die Apollonische und die Neil'sche Parabel nur die beiden Punkte:

$$\xi = 4\,m,\ \eta = \pm\,2\,m\sqrt{2},$$

oder: $x = {}^{8}/_{9}\,p = 3\,m;\ y = \mp\,{}^{16}/_{27}\,p\sqrt{2} = \mp\,2\,m\sqrt{2}$

gemein haben.

Legen wir durch den Scheitel der Apollonischen Parabel und durch die beiden gemeinschaftlichen Punkte der beiden Parabeln die beiden Geraden AL und AM, so ist, wenn $\alpha$ den Winkel derselben mit der $\xi$-Achse bezeichnet:

$$11)\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\eta}{\xi} = \pm\,\frac{2\,m\sqrt{2}}{4\,m} = \pm\,{}^{1}/_{2}\sqrt{2}.$$

Da die Richtung dieser Geraden somit von m unabhängig ist, so folgt daraus:

Construirt man zu mehreren Apollonischen Parabeln mit demselben Scheitel und derselben Achse ihre entsprechenden Evoluten, so liegen die Schnittpunkte einer jeden Apollonischen Parabel mit der zugehörigen Neil'schen Parabel auf zwei durch den Scheitel der Apollonischen Parabel gehenden Geraden, die unter den Winkeln

$$\alpha = \pm\,35^0\ 15'\ 51'',8$$

gegen die $\xi$-Achse geneigt sind.

Die Construction dieser Linien ergiebt sich leicht aus der Bemerkung, dass das Verhältniss der Seite eines Quadrats zur Diagonale $1 : \sqrt{2}$ oder ${}^{1}/_{2}\sqrt{2} : 1 = \sqrt{{}^{1}/_{2}} : 1$ ist.

## §. 4.

## Gestalt der Neil'schen Parabel.

Die Gleichung der Neil'schen Parabel in einem rechtwinkeligen Coordinatensysteme der x y ist:

$$7)\quad p\,y^2 = x^3.$$

Die geometrische Bedeutung des stets als positiv oder absolut betrachteten Parameters p ergiebt sich aus dieser Gleichung, wenn wir in derselben $x = p$ setzen. Dann ist nämlich $y^2 = p^2$, also $y = \pm p$.

Da nach 7) x stets positiv ist, so liegt die Neil'sche Parabel ganz auf der positiven Seite der y-Achse. Für $x = 0$ ist auch $y = 0$, die Neil'sche Parabel geht daher durch den Anfang O der Coordinaten.

Von $x = 0$ an wachsen die absoluten Werthe der Ordinaten gleichzeitig mit den Werthen der Abscissen und zwar entsprechen, da die Gleichung 7) in Bezug auf y rein quadratisch ist, jedem Werthe von x zwei gleiche, aber mit verschiedenen Vorzeichen versehene Werthe von y, so dass die Neil'sche Parabel symmetrisch zu beiden Seiten der x-Achse liegt, die wir daher die Achse derselben nennen wollen.

Sind $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ die Coordinaten von zwei Punkten der Neil'schen Parabel, so genügen dieselben den Gleichungen: $p\,y_1^{\,2} = x_1^{\,3}$, $p\,y_2^{\,2} = x_2^{\,3}$, aus denen sich die Proportion:

$$12)\quad y_1^{\,2} : y_2^{\,2} = x_1^{\,3} : x_2^{\,3}$$

ergiebt, welche zeigt, dass die Quadrate der Ordinaten den Cuben der entsprechenden Abscissen proportional sind, dass also die absoluten Werthe der Ordinaten in einem stärkeren Verhältnisse wachsen, als die Abscissen.

Ist $x < p$, also, wenn m und n positive ganze Zahlen bezeichnen, von denen $n > m$ ist, $x = \left(\frac{m}{n}\right) p$, so ist $x^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 p^2$; $y^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^3 p^2$, folglich $y^2 = \left(\frac{m}{n}\right) x^2$ also $y^2 < x^2$.

Für $x = p$ ist $y^2 = x^2$.

Ist $x > p$, also $x = \frac{n}{m} p$, so ist $x^2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2 p^2$, $y^2 = \left(\frac{n}{m}\right)^3 p^2$, folglich $y^2 = \frac{n}{m} x^2$ oder $y^2 > x^2$. Für $x = \infty$ wird auch $y^2 = \infty$.

Die absoluten Werthe der Ordinaten aller Punkte, deren Abscissen kleiner sind als der Parameter, sind kleiner als die zugehörigen Abscissen. Wenn die Abscisse gleich dem Parameter ist, so sind die absoluten Werthe der Ordinaten beiden gleich. Für grössere Abscissen sind die absoluten Werthe der Ordinaten grösser als die Abscissen.

Die Neil'sche Parabel besteht daher aus zwei von dem Anfange der Coordinaten ausgehenden, sich auf der positiven Seite der y-Achse, symmetrisch zu beiden Seiten der x-Achse, ins Unendliche erstreckenden Zweigen, welche gegen die x-Achse convex sind.

Die Convexität gegen die x-Achse ergiebt sich aus der Betrachtung der Differentialquotienten. Aus 7) folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2py} = \frac{3}{2}\frac{y}{x} = {}^3/_2\sqrt[3]{\frac{y}{p}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3x}{4py} = \frac{3}{4}\frac{y}{x^2} = \frac{3}{4\sqrt[3]{p^2y}}.$$

Da nun für jedes $x > 0$ die Werthe von y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ in der Nähe von x stetig sind und weder y noch $\frac{d^2y}{dx^2}$ gleich Null wird, auch beide stets dasselbe Vorzeichen haben, so ergiebt sich aus bekannten Gesetzen, dass die Neil'sche Parabel in allen Punkten gegen die x-Achse convex ist.

Da $\frac{dy}{dx} = {}^3/_2\sqrt[3]{\frac{y}{p}}$ die trigonometrische Tangente des Winkels der geometrischen Tangente im Punkte x y mit der x-Achse ist, und dieser Werth nur für $y = 0$ selbst gleich Null wird, so folgt daraus, dass nur im Anfange der Coordinaten die geometrische Tangente parallel zur x-Achse ist, also mit ihr zusammenfällt. Da ferner nur für $y = \infty$ der obige Werth selbst unendlich gross wird, so ist im Unendlichen die geometrische Tangente parallel zur y-Achse. Die y-Achse und jede Parallele zu ihr haben daher mit der Neil'schen Parabel einen Punkt im Unendlichen gemein.

---

## §. 5.

## Der Rückkehrpunkt und der Wendepunkt der Neil'schen Parabel.

Die Coordinaten der gemeinschaftlichen Punkte einer beliebigen Geraden

$$13)\quad y = Ax + b$$

mit der Neil'schen Parabel 7) $py^2 = x^3$ werden erhalten, wenn wir aus beiden Gleichungen dieselben bestimmen. Setzen wir den Werth von y aus 13) in 7) ein, so erhalten wir zur Bestimmung der Abscissen der gemeinschaftlichen Punkte die Gleichung:

14) $x^3 - pA^2x^2 - 2bpAx - b^2p = 0.$

Diese Gleichung liefert drei Werthe für x, die entsprechenden y ergeben sich eindeutig aus 13). Jede Gerade schneidet also die Neil'sche Parabel in drei Punkten, die entweder alle drei reell sind, oder aus einem reellen und zwei imaginären Punkten bestehen. (Die weitere Discussion dieser Gleichung siehe §. 11.)

Legen wir die Gerade durch den Anfang der Coordinaten, so ist ihre Gleichung:

15) $y = Ax,$

und zur Bestimmung der Abscissen der gemeinschaftlichen Punkte dieser Geraden mit der Neil'schen Parabel 7) erhalten wir die Gleichung:

16) $x^3 - pA^2x^2 = 0,$

welche die drei Wurzeln:

$x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = pA^2$

hat. Zur Bestimmung der Ordinaten der gemeinschaftlichen Punkte ergiebt sich die Gleichung:

17) $y^3 - pA^3y^2 = 0,$

welche mit Berücksichtigung von 15) die entsprechenden Wurzeln:

$y_1 = y_2 = 0,\ y_3 = pA^3$

hat.

Jede durch den Anfang O gelegte Gerade hat also in demselben zwei zusammenfallende Punkte mit der Neil'schen Parabel gemein. Der Punkt O ist somit ein Doppelpunkt, in welchem die beiden Zweige der Curve zusammentreffen. Jede durch den Doppelpunkt gehende Gerade $y = Ax$ schneidet die Neil'sche Parabel noch in dem Punkte:

18) $x = pA^2,\ y = pA^3.$

Unter diesen Geraden sind im Allgemeinen zwei, welche auch noch einen dritten unendlich benachbarten Punkt mit der Neil'schen Parabel gemein haben, und welche Tangenten im Doppelpunkt genannt werden.

Soll nämlich die Gleichung 16) drei gleiche Wurzeln Null haben, so muss der Coefficient von $x^2$ verschwinden, oder es muss

19) $A^2 = 0$

sein. Die Gleichung 19) hat, als quadratisch, die beiden gleichen Wurzeln $A = 0$. Die beiden Tangenten im Doppelpunkte fallen daher in eine zusammen. Der Doppelpunkt der Neil'schen Parabel ist daher ein stationärer oder Rückkehr-Punkt oder eine Spitze, und zwar der sogenannten ersten Art, da beide Zweige der Curve in der Nähe der Spitze auf verschiedenen Seiten der (doppelt zu rechnenden) Tangente liegen, welche selbst die Rückkehr- oder Spitzen-Tangente genannt wird und mit der Achse zusammenfällt.

Wir sahen in §. 4, dass jede Parallele zur y-Achse mit der Curve einen Punkt im Unendlichen gemein hat, und dem entsprechend erhalten

wir zur Bestimmung der Ordinaten der gemeinschaftlichen Punkte einer zur y-Achse parallelen Geraden:

$$20)\quad x = a,$$

und der Neil'schen Parabel auch nur die Gleichung zweiten Grades:

$$21)\quad p\,y^2 = a^3,$$

welche die beiden Wurzeln:

$$y_1 = +\,a\sqrt{\frac{a}{p}},\quad y_2 = -\,a\sqrt{\frac{a}{p}}$$

hat. Dieselben sind imaginär, wenn $a < 0$, sie sind reell und gleich, wenn $a = 0$, sie sind reell und absolut gleich, dem Vorzeichen nach aber verschieden, wenn $a > 0$ ist. Für unendlich grosse a rücken daher auch diese beiden Schnittpunkte ins Unendliche, die unendlich ferne Gerade hat mit der Neil'schen Parabel drei im Unendlichen zusammenfallende Punkte gemein, sie ist stationäre, Wende- oder Inflexions-Tangente, und der unendlich ferne Punkt der Neil'schen Parabel ist ein Wende- oder Inflexionspunkt. [2])

Wir können uns daher die beiden vom Rückkehrpunkt ausgehenden Zweige der Neil'schen Parabel als im unendlich fernen Inflexionspunkte zusammenhängend denken. In dem einen Zweige sind die Ordinaten alle positiv, in dem andern alle negativ.

Jede Parallele zur y-Achse geht also durch den Wendepunkt, und die y-Achse selbst ist die Verbindungslinie des Rückkehrpunktes mit dem Wendepunkte.

## §. 6.

## Die Gleichung der Neil'schen Parabel in Polar-Coordinaten.

Nehmen wir den Anfang der rechtwinkeligen Coordinaten zum Anfange eines polaren Coordinatensystems der $r\,\varphi$, die positive x-Achse zur Achse desselben, so erhalten wir, wenn wir in der Gleichung der Neil'schen Parabel

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi$$

setzen:

$$22)\quad r^3\cos^3\varphi - p\,r^2\sin^2\varphi = 0$$

als Gleichung der Neil'schen Parabel in Polar-Coordinaten.

Die Gleichung 22) hat für jeden Werth von $\varphi$ die beiden gleichen Wurzeln $r_1 = r_2 = 0$ und zeigt wie die Gleichungen 16) und 17),

[2]) Salmon (Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven. Deutsch bearbeitet von Dr. W. Fiedler.) folgert dies (Art. 53) aus der Gleichheit der Wurzeln von $u^{(3)} \equiv x^3 = 0$. Vergl. auch Art. 210. 5.

dass der Anfang O ein Doppelpunkt ist. Soll auch die dritte Wurzel von 22) gleich Null sein, so muss $\sin^2\varphi = 0$ sein. Diese Gleichung zeigt wie auch 19), dass die beiden Tangenten in O zusammenfallen, dass also O ein Rückkehrpunkt und die Achse des Coordinatensystems eine Rückkehrtangente ist.

Jeder Radius vector schneidet ausserdem die Neil'sche Parabel noch in je einem Punkte. Die Coordinaten aller dieser Punkte genügen der Gleichung:

$$r\cos^2\varphi - p\sin^2\varphi = 0, \text{ oder}$$

$$23)\quad r = p\,tg^2\varphi.\sec\varphi,$$

die wir daher auch als Gleichung der Neil'schen Parabel ansehen können.

Betrachten wir r als positiv oder negativ, je nachdem der Punkt der Neil'schen Parabel auf dem von O unter dem Winkel $\varphi$ gezogenen Radius vector, oder auf dessen Verlängerung über O hinaus nach der entgegengesetzten Richtung liegt, so erhalten wir alle Punkte der Neil'schen Parabel, wenn wir $\varphi$ von 0 bis $180^0$ stetig wachsen lassen. Soll aber r stets als positiv oder absolut betrachtet werden, so muss nach 23) $\sec\varphi$ stets positiv sein, und wir müssen $\varphi$ von $-90^0$ bis $+90^0$ stetig wachsen lassen. In jedem Falle gehört zu jedem Werthe von $\varphi$ ein einziger bestimmter Punkt und umgekehrt, zu jedem Punkte gehört ein bestimmter Werth von $\varphi$ (in den eben angegebenen Grenzen).

Wir können daher Punkte der Neil'schen Parabel kurz durch diesen Winkel $\varphi$ bezeichnen, welchen ihr Radius vector mit der Rückkehrtangente macht.

---

## §. 7.

## Die Neil'sche Parabel ist eine Curve vom Geschlecht Null oder eine Unicursal-Curve.

Da eine eigentliche Curve dritter Ordnung (d. h. eine Curve dritter Ordnung, welche nicht aus einem Kegelschnitt und einer Geraden, oder aus drei Geraden besteht) nur einen Doppelpunkt haben kann, (weil die Verbindungslinie von zweien vier Punkte mit der Curve gemein hätte), und die Neil'sche Parabel einen Doppelpunkt hat, so hat sie das ihrer Ordnung entsprechende Maximum von Doppelpunkten. Die Neil'sche Parabel ist daher nach Clebsch eine Curve vom Geschlecht Null, oder nach Cayley eine Curve vom Defect Null oder eine Unicursal-Curve. [3])

---

[3]) cf. Salmon, Höhere ebene Curven Art. 44.

Wenn wir in die Formeln $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ für r den Werth aus 23) $r = p \operatorname{tg}^2 \varphi \sec \varphi$ einsetzen, so erhalten wir als rechtwinkelige Coordinaten des dritten Schnittpunkts des durch den Rückkehrpunkt unter dem Winkel $\varphi$ gegen die Rückkehrtangente gezogenen Strahls mit der Neil'schen Parabel die Werthe:

$$24)\quad x = p \operatorname{tg}^2 \varphi,\quad y = p \operatorname{tg}^3 \varphi,$$

welche mit den in §. 5 gefundenen Werthen

$$18)\quad x = p A^2,\quad y = p A^3$$

identisch sind, da $A = \operatorname{tg} \varphi$ ist.

Die Coordinaten eines jeden Punktes der Neil'schen Parabel lassen sich hiernach stets als rationale algebraische Functionen einer veränderlichen Grösse, oder eines veränderlichen Parameters ($A = \operatorname{tg} \varphi$) ausdrücken, wie es bei allen Unicursal-Curven der Fall ist. Jedem Werthe von A entspricht ein bestimmter Punkt der Neil'schen Parabel, da x und y eindeutig durch A ausgedrückt sind, und umgekehrt zu jedem Punkte x y der Neil'schen Parabel gehört ein bestimmter Werth von A, nämlich $\frac{y}{x}$. Dem Rückkehrpunkte entspricht der Werth $A = 0$, dem Wendepunkt der Werth $A = \infty$.

Lassen wir $A = \operatorname{tg} \varphi$ stetig wachsend alle Werthe von 0 bis $+ \infty$, und von $- \infty$ bis 0 (oder von $- \infty$ durch Null hindurch bis $+ \infty$) durchlaufen, so erhalten wir alle Punkte der Neil'schen Parabel. Da wir uns den Radius vector stetig gedreht denken können, und wir für jeden Werth von $\varphi$ oder $\operatorname{tg} \varphi$ einen Werth von x und y erhalten, so müssen wir uns vorstellen, wie schon in §. 5 gezeigt, dass auch im Inflexionspunkte keine Unterbrechung der Stetigkeit stattfindet. [4])

---

## §. 8.

## Die Neil'sche Parabel als geometrischer Ort der Schnittpunkte eines Strahlenbüschels und eines demselben projectivischen Kegelschnittbüschels.

Liegt ein Punkt auf der zur y-Achse parallelen Geraden:

$$25)\quad x = A^2 p,$$

und gleichzeitig auf dem durch den Anfang gehenden Kegelschnitt:

$$26)\quad A^2 x^2 = y^2,$$

so genügen seine Coordinaten der Gleichung $x^3 = p y^2$, d. h. er ist ein Punkt einer Neil'schen Parabel mit dem Parameter p, deren Rückkehrpunkt O, und deren Rückkehrtangente senkrecht zur y-Achse ist.

[4]) Durège, Ueber fortgesetztes Tangentenziehen an Curven dritter Ordnung mit einem Doppel- oder Rückkehrpunkte. pag. 4.

Lassen wir A sich stetig verändern, so bilden die Geraden 25) ein Strahlenbüschel, dessen Strahlen sämmtlich auf der positiven Seite der y-Achse liegen und parallel mit derselben sind (dessen Mittelpunkt also der Inflexionspunkt der Neil'schen Parabel ist). Ebenso bilden bei veränderlichem A die Kegelschnitte 26) ein Kegelschnittbüschel, dessen Basispunkte im Rückkehrpunkte der Neil'schen Parabel liegen. Die Kegelschnitte zerfallen in je zwei sich im Rückkehrpunkt schneidende gegen die x- und y-Achse symmetrisch liegende Gerade.

Lassen wir jedem Strahl des Strahlenbüschels 25) einen Kegelschnitt des Büschels 26) entsprechen, welcher dasselbe A hat, so sind beide Büschel projectivisch auf einander bezogen.

Die Neil'sche Parabel ist daher der geometrische Ort der Schnittpunkte eines (Parallel-)Strahlenbüschels, dessen Mittelpunkt der Inflexionspunkt ist, und eines demselben projectivischen Kegelschnittbüschels, dessen Basispunkte im Rückkehrpunkte liegen. [5])

Genügen ferner die Coordinaten eines Punktes den beiden Gleichungen:

$$27)\ y = Ax, \qquad 28)\ Apy = x^2,$$

so genügen sie ebenfalls der Gleichung der Neil'schen Parabel. Lassen wir A sich verändern, so stellt 27) ein Strahlenbüschel dar, dessen Mittelpunkt der Rückkehrpunkt ist, und die Gleichung 28) ein Kegelschnittbüschel, dessen Basispunkte der Rückkehrpunkt und der Wendepunkt sind. Wie man sieht, sind die Kegelschnitte hier Parabeln, deren Scheitel der Rückkehrpunkt ist, und deren Achse die y-Achse, die Verbindungslinie des Rückkehrpunktes mit dem Wendepunkte ist. Der geometrische Ort der Durchschnitte entsprechender Elemente beider projectivischen Büschel ist die Neil'sche Parabel.

## §. 9.

## Construction von Punkten der Neil'schen Parabel, wenn der Rückkehrpunkt, die Rückkehrtangente und der Parameter gegeben sind.

Die Gleichungen

$$23)\ r = p\,tg^2\varphi \,.\, \sec\varphi,$$

$$24)\ x = p\,tg^2\varphi,\ y = p\,tg^3\varphi,$$

ebenso auch 25) und 26) geben uns Mittel zur Construction von Punkten

[5]) cf. Durège, Die ebenen Curven dritter Ordnung. Art. 236.

der Neil'schen Parabel, wenn der Rückkehrpunkt, die Rückkehrtangente und der Parameter derselben gegeben sind.

Fig. 4. Ist nämlich (Fig. 4) O der Rückkehrpunkt, OX die Rückkehrtangente, OC = p der Parameter, und errichten wir in O und C auf der Rückkehrtangente die Lothe OY, CZ, ziehen ferner durch O eine beliebige Gerade OB unter dem Winkel BOC = $\varphi$, so ist deren Gleichung $y = A x$, wenn $A = \operatorname{tg} \varphi$ ist, und $BC = p \cdot \operatorname{tg} \varphi$. Errichten wir in B auf OB das Loth BD, so ist $CD = CB \cdot \operatorname{tg} \varphi = p \operatorname{tg}^2 \varphi$. Machen wir nun noch OE = CD und errichten in E auf OC das Loth, welches OB in P schneidet, so ist P ein Punkt der Neil'schen Parabel. Denn es ist

$$x = OE = CD = CB \cdot \operatorname{tg} \varphi = OC \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi = p \operatorname{tg}^2 \varphi,$$
$$y = OE \cdot \operatorname{tg} \varphi = p \cdot \operatorname{tg}^3 \varphi,$$
$$r = OP = OE \cdot \sec \varphi = p \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \sec \varphi.$$

Die vorige Construction lässt sich etwas abändern, wenn wir AO = OC = p, und OG = CB machen und dann in G auf AG das Loth errichten, wodurch wir ebenfalls den Punkt E erhalten, da ja $\sphericalangle$ GAE = $\sphericalangle$ BOC = OGE = CBD = $\varphi$ ist.

Die beiden Punkte H und I, für welche $\varphi = \pm 45^0$ ist, erhalten wir sofort, wenn wir CH = IC = p = OC machen.

Für eine zweite Neil'sche Parabel mit demselben Rückkehrpunkte und derselben Rückkehrtangente, aber mit dem Parameter $p_1$ erhalten wir, wenn wir den dem Winkel $\varphi$ entsprechenden Radius vector derselben mit $r_1$ bezeichnen:

$$r_1 = p_1 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi \sec \varphi,$$

aus welcher zusammen mit

$$r = p \operatorname{tg}^2 \varphi \sec \varphi,$$

die Proportion:

$$r : r_1 = p : p_1$$

folgt. Die in derselben Richtung gezogenen Radien vectoren zweier Neil'scher Parabeln mit demselben Rückkehrpunkte und derselben Rückkehrtangente verhalten sich wie die Parameter der beiden Parabeln.

Man erhält daher aus einer Neil'schen Parabel andere, wenn man ihre Radien vectoren sämmtlich in demselben Verhältniss verlängert oder verkürzt.

## §. 10.

### Bedeutung der Ungleichungen:

$$p y^2 \gtrless x^3.$$

Genügen die Coordinaten x y eines Punktes der Gleichung $p y^2 = x^3$ oder $y^2 = \frac{x^3}{p}$, so liegt der Punkt auf der Neil'schen Parabel.

Ist $p y^2 > x^3$, also, da p positiv ist, $y^2 > \frac{x^3}{p}$, so ist die Entfernung des Punktes von der Achse grösser als der Abstand des der Abscisse x entsprechenden Punktes der Neil'schen Parabel. Der Punkt x y liegt also in diesem Falle ausserhalb des von der Neil'schen Parabel umschlossenen Theils der Ebene, oder kurz: ausserhalb der Neil'schen Parabel. [Da für negative x obige Ungleichung stets erfüllt ist, so liegen alle Punkte auf der negativen Seite der y-Achse ausserhalb der Neil'schen Parabel, wie bekannt ist.]

Ist $p y^2 < x^3$, also $y^2 < \frac{x^3}{p}$, so ist die Entfernung des Punktes von der Abscissenachse kleiner als der Abstand des derselben Abscisse entsprechenden Punktes der Neil'schen Parabel, und es liegt daher der Punkt innerhalb des von der Neil'schen Parabel umschlossenen Theils der Ebene, oder kurz: innerhalb der Neil'schen Parabel.

---

# Zweites Kapitel.

## Die Sekanten und Tangenten der Neil'schen Parabel.

### §. 11.

### Gemeinschaftliche Punkte der Neil'schen Parabel und einer Geraden.

Zur Bestimmung der Abscissen der gemeinschaftlichen Punkte der Neil'schen Parabel:

$$7)\quad p y^2 = x^3,$$

und der Geraden:

$$y = A x + b$$

fanden wir in §. 5 die Gleichung:

$$14)\quad x^3 - p A^2 x^2 - 2 b p A x - b^2 p = 0.$$

Ist die Gleichung der Geraden in der Form

$$29)\quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

gegeben, so erhalten wir die Gleichung:

$$30)\quad a^2 x^3 - b^2 p x^2 + 2 a b^2 p x - a^2 b^2 p = 0.$$

Da in diesen Gleichungen das constante Glied stets negativ ist, so haben sie stets eine reelle positive Wurzel. Sind auch die andern beiden Wurzeln reell, so können sie nur positiv sein, da die Punkte der Neil'schen Parabel nur positive Abscissen haben. Dazu ist nothwendig, dass die Gleichungen drei Zeichenwechsel haben, dass also A b negativ, oder dass a positiv ist, d. h. dass die Gerade die positive x-Achse schneidet. Dies ist jedoch nur nothwendige, nicht hinreichende Bedingung.

Setzen wir in 14) für x den Werth

$$x = u + {}^1/_3\, p\, A^2$$

ein, so haben wir zur Bestimmung von u die Gleichung:

$$31)\ u^3 - ({}^1/_3 p^2 A^4 + 2\, b p A) u - ({}^2/_{27} p^3 A^6 + {}^2/_3 b p^2 A^4 + b^2 p) = 0,$$

oder, wenn wir zur Abkürzung

$$\alpha = -({}^1/_3\, p^2 A^4 + 2\, b\, p\, A),$$
$$\beta = -({}^2/_{27}\, p^3 A^6 + {}^2/_3\, b\, p^2 A^4 + b^2 p)$$

setzen:

$$u^3 + \alpha u + \beta = 0.$$

Die drei Wurzeln dieser Gleichung liefert uns die Cardanische Formel in der Gestalt:

$$u = \sqrt[3]{-{}^1/_2\,\beta + \sqrt{{}^1/_4\beta^2 + {}^1/_{27}\alpha^3}} + \sqrt[3]{-{}^1/_2\,\beta - \sqrt{{}^1/_4\,\beta^2 + {}^1/_{27}\,\alpha^3}}.$$

Setzen wir nun

$$v = \sqrt[3]{-{}^1/_2\,\beta + \sqrt{{}^1/_4\beta^2 + {}^1/_{27}\alpha^3}},$$
$$w = \sqrt[3]{-{}^1/_2\,\beta - \sqrt{{}^1/_4\,\beta^2 + {}^1/_{27}\,\alpha^3}},$$

und lassen v und w nur je einen der drei Wurzelwerthe bezeichnen, setzen wir ferner die beiden complexen Cubikwurzeln der Einheit:

$${}^1/_2\,(-1 + \sqrt{-3}) = \gamma,\ {}^1/_2\,(-1 - \sqrt{-3}) = \gamma^2,$$

so erhalten wir für die drei Wurzeln $u_1$, $u_2$, $u_3$ der Gleichung 31) folgende Werthe: [6])

$$u_1 = v + w,$$
$$u_2 = \gamma\, v + \gamma^2\, w,$$
$$u_3 = \gamma^2\, v + \gamma\, w.$$

Führen wir in die Ausdrücke von v und w die Werthe von $\alpha$ und $\beta$ wieder ein, so wird:

---

[6]) Serret, Handbuch der höheren Algebra Deutsch v. Wertheim. Art. 493.

$$32)\ldots v = \sqrt[3]{\tfrac{1}{27} p^3 A^6 + \tfrac{1}{3} b p^2 A^3 + \tfrac{1}{2} b^2 p + \tfrac{1}{6} b p \sqrt{\tfrac{1}{3}(27 b^2 + 4 b p A^3)}}$$

$$= \sqrt[3]{\tfrac{1}{3} p^2 A^3 (\tfrac{1}{9} p A^3 + b) + \tfrac{1}{2} b^2 p \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4 p A^3}{27 b}}\right)},$$

$$w = \sqrt[3]{\tfrac{1}{27} p^3 A^6 + \tfrac{1}{3} b p^2 A^3 + \tfrac{1}{2} b^2 p - \tfrac{1}{6} b p \sqrt{\tfrac{1}{3}(27 b^2 + 4 b p A^3)}}$$

$$= \sqrt[3]{\tfrac{1}{3} p^2 A^3 (\tfrac{1}{9} p A^3 + b) + \tfrac{1}{2} b^2 p \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4 p A^3}{27 b}}\right)}.$$

Die drei Wurzeln $x_1$, $x_2$, $x_3$ der Gleichung 14) sind demnach:

$$x_1 = \tfrac{1}{3} p A^2 + v + w,$$
$$x_2 = \tfrac{1}{3} p A^2 + \gamma v + \gamma^2 w,$$
$$x_3 = \tfrac{1}{3} p A^2 + \gamma^2 v + \gamma w.$$

Zur Bestimmung der Ordinaten der gemeinschaftlichen Punkte der Neil'schen Parabel und der Geraden finden wir durch Elimination von x aus den Gleichungen beider Linien die Gleichung:

$$33)\ldots y^3 - (3 b + p A^3) y^2 + 3 b^2 y - b^3 = 0.$$

Für

$$y = z + \tfrac{1}{3} (3 b + p A^3)$$

geht dieselbe über in:

$$z^3 - (2 b p A^3 + \tfrac{1}{3} p^2 A^6) z - (\tfrac{2}{27} p^3 A^9 + \tfrac{2}{3} b p^2 A^6 + b^2 p A^3) = 0.$$

Diese Gleichung hat die drei Wurzeln:

$$z_1 = v_1 + w_1,$$
$$z_2 = \gamma v_1 + \gamma^2 w_1,$$
$$z_3 = \gamma^2 v_1 + \gamma w_1,$$

wenn

$$34)\ldots v_1 = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2} p A^3 (\tfrac{1}{27} p^2 A^6 + \tfrac{2}{3} b p A^3 + b^2) + \sqrt{\tfrac{1}{4} b^4 p^2 A^6 + \tfrac{1}{27} b^3 p^3 A^9}}$$

$$= A \sqrt[3]{\tfrac{1}{3} p^2 A^3 (\tfrac{1}{9} p A^3 + b) + \tfrac{1}{2} b^2 p \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4 p A^3}{27 b}}\right)},$$

und $w_1$ der entsprechende Werth mit dem negativen Vorzeichen vor der Quadratwurzel ist.

Sind $v_1$ und $w_1$ die den Werthen v, w entsprechenden Wurzeln, so ist nach 32) und 34)

$$v_1 = A v,\ w_1 = A w,\ z_1 = A u_1,$$
$$y_1 = A u_1 + b + \tfrac{1}{3} p A^3,$$

also $$y_1 = A x_1 + b.$$

Wollen wir die Schnittpunkte der Parabel und der Geraden durch ihre Parameter (§. 7) bestimmen, so haben wir die Werthe:

$$x = p \,.\, tg^2\,\varphi,\quad y = p \,.\, tg^3\,\varphi$$

in die Gleichung der Geraden

$$y = A\,x + b$$

einzusetzen, wodurch wir zur Bestimmung von $tg\,\varphi$ die Gleichung:

$$35) \ldots p \,.\, tg^3\,\varphi - A\,p\,tg^2\,\varphi - b = 0$$

und zur Bestimmung von $cotg\,\varphi$ die Gleichung:

$$36)\ b\,cotg^3\,\varphi + A\,p\,cotg\,\varphi - p = 0$$

erhalten.

Da in der Gleichung 36) das Glied mit $cotg^2\,\varphi$ fehlt, so lassen sich ihre Wurzeln direct aus der Cardanischen Formel finden. Sie liefert den Werth:

$$37)\ cotg\varphi = \sqrt[3]{\frac{p}{2b} + \sqrt{\frac{p^2}{b^4}(\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{27}bpA^3)}} + \sqrt[3]{\frac{p}{2b} - \sqrt{\frac{p^2}{b^4}(\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{7}bp_2A^3)}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{p}{2\,b}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4pA^3}{27\,b}}\right)} + \sqrt[3]{\frac{p}{2\,b}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4\,p\,A^3}{27\,b}}\right)},$$

aus welchem sich die drei Wurzeln nach dem Obigen leicht ergeben. Ist die Gleichung der Geraden in der Form

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

gegeben, so ist:

$$38)\ cotg\,\varphi = \sqrt[3]{\frac{p}{2\,b}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\,b^2\,p}{27\,a^3}}\right)} + \sqrt[3]{\frac{p}{2\,b}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\,b^2\,p}{27\,a^3}}\right)}.$$

Zwischen den Wurzeln der Gleichungen für x, y, $tg\,\varphi$, $cotg\,\varphi$ finden nun die bekannten Beziehungen statt:

$$39)\ \begin{cases} x & = \sqrt[3]{py^2} = p\,tg^2\varphi = \dfrac{p}{cotg^2\varphi}, \\ y & = \sqrt{\dfrac{x^3}{p}} = p\,tg^3\varphi = \dfrac{p}{cotg^3\varphi}, \\ tg\,\varphi & = \sqrt{\dfrac{x}{p}} = \sqrt[3]{\dfrac{y}{p}} = \dfrac{1}{cotg\,\varphi} \\ cotg\,\varphi & = \sqrt{\dfrac{p}{x}} = \sqrt[3]{\dfrac{p}{y}} = \dfrac{1}{tg\,\varphi}. \end{cases}$$

Die Reellität der Wurzeln aller dieser Gleichungen hängt von dem Vorzeichen der Grösse unter den Quadratwurzeln in 32), 34), 37) und 38) ab.

Ist $27\,b^2 + 4\,b\,p\,A^3 < 0$ oder $1 + \frac{4\,p\,A^3}{27\,b} < 0$, oder $1 - \frac{4\,p\,b^2}{27\,a^3} < 0$, so haben die Gleichungen drei reelle ungleiche Wurzeln; ist $27\,b^2 + 4\,b\,p\,A^3 = 0$, oder $27\,b + 4\,p\,A^3 = 0$, $27\,a^3 = 4\,p\,b^2$, so haben dieselben drei reelle Wurzeln, unter denen zwei gleiche sind; ist $27\,b^2 + 4\,b\,p\,A^3 > 0$, so haben die Gleichungen eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln.

Die Gerade

$$y = A\,x + b, \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\right)$$

und die Neil'sche Parabel

$$p\,y^2 = x^3$$

haben daher 1) drei reelle verschiedene Punkte mit einander gemein, oder 2) die Gerade hat zwei zusammenfallende Punkte mit der Neil'schen Parabel gemein (sie ist Tangente) und noch einen dritten Punkt, oder 3) die Gerade schneidet die Neil'sche Parabel in einem reellen und in 2 imaginären Punkten, je nachdem die Werthe:

$$27\,b^2 + 4\,b\,p\,A^3, \text{ oder } 1 + \frac{4\,p\,A^3}{27\,b},$$

$$\left(27\,a^4 - 4\,a\,b^2\,p, \text{ oder } 1 - \frac{4\,b^2\,p}{27\,a^3}\right)$$

1) kleiner als Null, oder 2) gleich Null, oder 3) grösser als Null sind.

---

## §. 12.

### Fortsetzung. Specielle Fälle.

Geht die Gerade $y = A\,x$ durch den Rückkehrpunkt, so ist der dritte Schnittpunkt nach §. 5:

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = A;\ x_3 = p\,A^2,\ y_3 = p\,A^3.$$

Für $A = 0$ fällt derselbe ebenfalls mit dem Rückkehrpunkte zusammen und für $A = \infty$ ist es der Wendepunkt im Unendlichen.

Geht die Gerade $x = a$ durch den Wendepunkt, ist sie also parallel zur y-Achse, so hat sie ausserdem mit der Neil'schen Parabel die beiden Punkte:

$$x_1 = x_2 = a,$$

$$y_1 = +\,a\sqrt{\frac{a}{p}},\ y_2 = -\,a\sqrt{\frac{a}{p}}$$

gemein. Dieselben sind reell, wenn $a > 0$ ist, sie sind reell und fallen mit dem Rückkehrpunkte zusammen, wenn $a = 0$, und sie sind imaginär, wenn $a < 0$ ist. (cf. §. 5.)

Jede durch den Wendepunkt gezogene Gerade schneidet die Neil'sche Parabel noch in 2 Punkten $P_1$ und $P_2$, deren Verbindungssehne von der Rückkehrtangente in $P_0$ halbirt wird. Es sind also $P_1$ und $P_2$, $P_0$ und der Inflexionspunkt I je zwei zugeordnete harmonische Punkte, und wenn wir O als Mittelpunkt eines Strahlenbüschels betrachten, so sind

$$OP\ (y = 0),\ OI\ (x = 0);\ OP_1\ (y = +Ax),\ OP_2\ (y = -Ax)$$

je zwei zugeordnete harmonische Strahlen, wie aus der Form der Gleichungen dieser 4 Strahlen sich auch sofort ergiebt.

Die dem Inflexionspunkte in Bezug auf die Schnittpunkte aller durch ihn gezogenen Sekanten mit der Neil'schen Parabel zugeordneten harmonischen Punkte liegen auf der Rückkehrtangente, sie ist daher nach Salmon's Benennung die harmonische Polare des Inflexionspunktes. [7])

Ist die Gerade $y = b$ parallel zur Rückkehrtangente, so erhalten wir für x die Gleichung:

$$x^3 - p\,b^2 = 0,$$

welche die Wurzeln

$$x_1 = \sqrt[3]{p\,b^2},\ x_2 = \gamma\sqrt[3]{p\,b^2},\ x^3 = \gamma^2\sqrt[3]{p\,b^2}$$

hat, worin $\gamma$ eine imaginäre Cubikwurzel der Einheit bezeichnet. (§. 11.)

Jede Parallele zur Rückkehrtangente schneidet die Neil'sche Parabel in einem reellen und in zwei imaginären Punkten.

## §. 13.

### Beziehungen zwischen den Coordinaten dreier in einer Geraden liegenden Punkte der Neil'schen Parabel.

Bezeichnen wir die drei Wurzeln der in §. 11 gefundenen Gleichungen 14), 33), 35) und 36) durch die angehängten Indices 1, 2, 3, so erhalten wir nach bekannten Gesetzen über die Gleichungen folgende Beziehungen zwischen den Coordinaten der drei Schnittpunkte einer Geraden mit der Neil'schen Parabel:

[7]) cf. Durège, Fortgesetztes Tangentenziehen, pag. 5, und Salmon, Höhere ebene Curven. Art. 171.

$$40) \ldots \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = p A^2;\ x_1 x_2 x_3 = b^2 p; \\ y_1 + y_2 + y_3 = 3 b + p A^3;\ y_1 y_2 y_3 = b^3; \\ \operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2 + \operatorname{tg} \varphi_3 = A;\ \operatorname{tg} \varphi_1 . \operatorname{tg} \varphi_2 . \operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{b}{p}; \\ \operatorname{cotg} \varphi_1 + \operatorname{cotg}_2 + \operatorname{cotg} \varphi_3 = 0;\ \operatorname{cotg} \varphi_1 . \operatorname{cotg} \varphi_2 . \operatorname{cotg} \varphi_3 = \frac{p}{b}. \end{cases}$$

Von diesen Beziehungen ist die vierte:

$$40)\ a) \ldots \operatorname{cotg} \varphi_1 + \operatorname{cotg} \varphi_2 + \operatorname{cotg} \varphi_3 = 0,$$

oder auch die aus 35) folgende:

$$40)\ b) \ldots \operatorname{tg} \varphi_2 . \operatorname{tg} \varphi_3 + \operatorname{tg} \varphi_3 \operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_1 . \operatorname{tg} \varphi_2 = 0$$

die einfachste und wichtigste.

Aus 40) a) ergiebt sich noch, da $\operatorname{cotg} \varphi = \frac{x}{y}$ ist, die Gleichung:

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3} = 0,$$

welche mit Benutzung der Gleichung der Neil'schen Parabel die Form:

$$\sqrt[3]{\frac{p}{y_1}} + \sqrt[3]{\frac{p}{y_2}} + \sqrt[3]{\frac{p}{y_3}} = 0$$

oder:

$$40)\ c) \ldots \sqrt[3]{\frac{1}{y_1}} + \sqrt[3]{\frac{1}{y_2}} + \sqrt[3]{\frac{1}{y_3}} = 0$$

annimmt.

Drücken wir die Werthe von y mit Hülfe der Gleichung der Neil'schen Parabel durch x aus, so erhalten wir die Gleichung:

$$\sqrt{\frac{1}{x_1}} + \sqrt{\frac{1}{x_2}} + \sqrt{\frac{1}{x_3}} = 0,$$

in welcher aber die Vorzeichen der Quadratwurzeln den Vorzeichen der zugehörigen y oder $\operatorname{tg} \varphi$ entsprechend genommen werden müssen.

Wir erhalten somit folgenden Satz:

Wenn drei Punkte der Neil'schen Parabel in einer Geraden liegen, so gelten zwischen den Coordinaten derselben die Gleichungen:

$$40\ a)\ \operatorname{cotg} \varphi_1 + \operatorname{cotg} \varphi_2 + \operatorname{cotg} \varphi_3 = 0,$$

$$40)\ b)\ \operatorname{tg} \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_3 + \operatorname{tg} \varphi_3 \operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 = 0,$$

und ebenso auch die übrigen Gleichungen 40).

Genügen umgekehrt die Parameter dreier Punkte der Neil'schen Parabel den Gleichungen 40) a) und b), so liegen die Punkte in einer Geraden.

Die Bedingung, dass die drei Punkte $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ in einer Geraden liegen, ist bekanntlich die, dass der Ausdruck:

$$y_1 (x_2 - x_3) + y_2 (x_3 - x_1) + y_3 (x_1 - x_2)$$

verschwindet. Setzen wir hierin für die Coordinaten x und y die Werthe:

$$x = p\,tg^2\varphi,\ y = p\,tg^3\varphi,$$

und führen wir die Abkürzungen:

$$t = tg\,\varphi,\ t_1 = tg\,\varphi_1,\ t_2 = tg\,\varphi_2,\ t_3 = tg\,\varphi_3$$

ein, so geht der obige Ausdruck über in:

$$p^2[t_1^3(t_2^2 - t_3^2) + t_2^3(t_3^2 - t_1^2) + t_3^3(t_1^2 - t_2^2)].$$

Unterdrücken wir in demselben den Factor $p^2$ als stets positiv, so können wir ihn schreiben:

$$t_1^2 t_2^2 (t_1 - t_2) - t_3^2[t_1^3 - t_2^3 - t_3(t_1^2 - t_2^2)].$$

Setzen wir nun für $t_3$ den sich aus 40) b) ergebenden Werth:

$$t_3 = -\frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}$$

in diesen Ausdruck ein, so erhalten wir:

$$t_1^2 t_2^2 (t_1 - t_2) - \frac{t_1^2 t_2^2}{(t_1 + t_2)^2}[t_1^3 - t_2^3 + \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}(t_1^2 - t_2^2)]$$

$$= t_1^2 t_2^2 (t_1 - t_2) - \frac{t_1^2 t_2^2}{(t_1 + t_2)^2} \cdot (t_1^3 - t_2^3 + t_1^2 t_2 - t_1 t_2^2)$$

$$= t_1^2 t_2^2 (t_1 - t_2) - t_1^2 t_2^2 (t_1 - t_2) = 0,$$

so dass also die Bedingungsgleichung erfüllt ist.

Aus 40) c) ergiebt sich noch, dass von den drei reellen Schnittpunkten der Neil'schen Parabel mit einer Geraden stets zwei auf einem Zweige der Curve liegen, und zwar die beiden Punkte mit den absolut grösseren Ordinaten, während der dritte mit der absolut kleinsten Ordinate auf dem anderen Zweige liegt, und zwar, wie sich noch aus

$$y_1 y_2 y_3 = b^3$$

ergiebt, auf derselben Seite der Rückkehrtangente mit dem Schnittpunkte der Geraden und der y-Achse.

---

## §. 14.

## Verhältniss der Producte der Abschnitte der Sekanten. [8])

Legen wir durch einen beliebigen Punkt $P_0\ (x_0\ y_0)$ ein dem rechtwinkeligen Systeme der x y paralleles Coordinatensystem der $\xi, \eta$, so ist die Gleichung der Neil'schen Parabel $x^3 - p\,y^2 = 0$ in demselben, da $x = \xi + x_0,\ y = \eta + y_0$ ist:

$$41)\ (\xi + x_0)^3 - p\,(\eta + y_0)^2 = 0.$$

Wenn wir $P_0$ als Anfang eines polaren Coordinatensystems der $r\,\alpha$ und die positive $\xi$-Achse als Achse desselben annehmen, so wird, da $\xi = r\cos\alpha,\ \eta = r\sin\alpha$ ist, die Gleichung der Neil'schen Parabel in diesen Polarcoordinaten:

$$42)\ (r\cos\alpha + x_0)^3 - p\,(r\sin\alpha + y_0)^2 = 0.$$

---

[8]) cf. Salmon, Höhere ebene Curven, Art. 124.

Wenn wir also durch den Punkt $P_0$ eine Gerade ziehen, welche unter dem Winkel $\alpha_1$ gegen die Abscissenachse geneigt ist, und die Neil'sche Parabel in den Punkten $P_1$ $P_2$ $P_3$ schneidet, so haben wir zur Bestimmung der drei vom Punkte $P_0$ aus gerechneten Abschnitte derselben: ($P_0 P_1 = r_1$, $P_0 P_2 = r_2$, $P_0 P_3 = r_3$) die Gleichung:

$$43)\ r^3 \cos^3 \alpha_1 + r^2 (3 x_0 \cos^2 \alpha_1 - p \sin^2 \alpha_1) + r (3 x_0^2 \cos \alpha_1 - 2 p y \sin \alpha_1) + (x_0^3 - p y_0^2) = 0.$$

Aus derselben ergiebt sich:

$$44)\ P_0 P_1 . P_0 P_2 . P_0 P_3 = - \frac{x_0^3 - p y_0^2}{\cos^3 \alpha_1}.$$

Ziehen wir durch den Punkt $P_0$ eine zweite Gerade unter dem Winkel $\alpha_2$ gegen die Achse, welche die Neil'sche Parabel in den Punkten $R_1$, $R_2$, $R_3$ schneidet, so erhalten wir auf demselben Wege, wie vorher:

$$45)\ P_0 R_1 . P_0 R_2 . P_0 R_3 = - \frac{x_0^3 - p y_0^2}{\cos^3 \alpha_2}.$$

Aus den Gleichungen 44) und 45) folgt die Proportion:

$$46)\ \frac{P_0 P_1 . P_0 P_2 . P_0 P_3}{P_0 R_1 . P_0 R_2 . P_0 R_3} = \frac{\cos^3 \alpha_2}{\cos^3 \alpha_1},$$

welche uns folgenden Satz giebt:

Das Verhältniss der Producte der drei Abschnitte zweier durch einen Punkt gezogener Sekanten bleibt für jede Lage des Punktes dasselbe, wenn nur die Richtungen der Sekanten dieselben bleiben.

Die Producte der drei Abschnitte zweier durch einen Punkt gehender Sekanten sind umgekehrt proportional den Cuben der Cosinus der Winkel, welche die Sekanten mit der Achse bilden.

Ziehen wir durch einen andern Punkt Q ($x_1$ $y_1$) eine Sekante unter dem Winkel $\alpha_1$ gegen die Achse, welche die Neil'sche Parabel in den Punkten $S_1$, $S_2$, $S_3$ schneidet, so erhalten wir:

$$47)\ QS_1 . QS_2 . QS_3 = - \frac{x_1^3 - p y_1^2}{\cos^3 \alpha_1},$$

und aus 44) und 47) die Proportion:

$$48)\ \frac{P_0 P_1 . P_0 P_2 . P_0 P_3}{QS_1 . QS_2 . QS_3} = \frac{x_0^3 - p y_0^2}{x_{13} - p y_1^2}.$$

Das Verhältniss der Producte der von den Punkten $x_0$ $y_0$, $x_1$ $y_1$ an gerechneten Abschnitte zweier paralleler Sekanten der Neil'schen Parabel ist unabhängig von der Richtung, in welcher die parallelen Sekanten durch die beiden Punkte gezogen werden.

Die Producte der drei Abschnitte zweier paralleler Sekanten sind proportional dem Resultate der Substitution der Coordinaten der beiden Punkte, von welchen aus die Abschnitte gerechnet werden, in die linke Seite der Gleichung der Neil'schen Parabel $x^3 - py^2 = 0$.

---

## §. 15.

## Verbindungslinien der Schnittpunkte zweier Sekanten.

Wenn zwei Sekanten die Neil'sche Parabel in den Punkten *) $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ und $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ schneiden, so haben wir nach §. 13 die Gleichungen:

$$49) \quad \operatorname{cotg} \alpha_1 + \operatorname{cotg} \alpha_2 + \operatorname{cotg} \alpha_3 = 0,$$
$$50) \quad \operatorname{cotg} \beta_1 + \operatorname{cotg} \beta_2 + \operatorname{cotg} \beta_3 = 0.$$

Die Verbindungslinie eines Punktes $\alpha$ mit einem Punkte $\beta$ schneidet die Neil'sche Parabel noch in einem dritten Punkte $\gamma$. Ziehen wir die Geraden $\alpha_1 \beta_1$, $\alpha_2 \beta_2$, $\alpha_3 \beta_3$, so erhalten wir drei neue Punkte $\gamma_{11}$, $\gamma_{22}$, $\gamma_{33}$, für welche wir folgende Gleichungen haben:

$$\operatorname{cotg} \gamma_{11} = -(\operatorname{cotg} \alpha_1 + \operatorname{cotg} \beta_1),$$
$$\operatorname{cotg} \gamma_{22} = -(\operatorname{cotg} \alpha_2 + \operatorname{cotg} \beta_2),$$
$$\operatorname{cotg} \gamma_{33} = -(\operatorname{cotg} \alpha_3 + \operatorname{cotg} \beta_3).$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhalten wir mit Rücksicht auf 49) und 50):

$$51) \quad \operatorname{cotg} \gamma_{11} + \operatorname{cotg} \gamma_{22} + \operatorname{cotg} \gamma_{33} = 0.$$

Die drei Schnittpunkte der Verbindungslinien liegen also in einer Geraden.

Wenn wir jeden Punkt $\alpha$ mit jedem Punkte $\beta$ verbinden, so erhalten wir im Ganzen 9 solcher Verbindungslinien, welche die Neil'sche Parabel in 9 Punkten $\gamma$ schneiden. Wir wollen diese Punkte mit doppelten Indices bezeichnen, so dass der erste Index mit dem des entsprechenden $\alpha$, der zweite mit dem des $\beta$ übereinstimmt, welche mit dem $\gamma$ in derselben Geraden liegen. Die 9 Punkte sind dann:

$$\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{21}, \gamma_{22}, \gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{32}, \gamma_{33}.$$

Von diesen 9 Punkten liegen nun je drei, welche auf den Verbindungslinien je eines Punktes $\alpha$ mit je einem $\beta$ liegen, die also in den ersten und zweiten Indices verschieden sind, in einer Geraden, nämlich:

$$\gamma_{11}\ \gamma_{22}\ \gamma_{33}, \quad \gamma_{12}\ \gamma_{23}\ \gamma_{31}, \quad \gamma_{13}\ \gamma_{22}\ \gamma_{31},$$
$$\gamma_{11}\ \gamma_{23}\ \gamma_{32}, \quad \gamma_{12}\ \gamma_{21}\ \gamma_{33}, \quad \gamma_{13}\ \gamma_{21}\ \gamma_{32},$$

so dass wir sechs Gerade bekommen.

*) Vgl. §. 7 am Ende.

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Behauptung ist ganz analog dem obigen. So folgt z. B. aus:

$$\operatorname{cotg}\gamma_{12} = -(\operatorname{cotg}\alpha_1 + \operatorname{cotg}\beta_2),$$
$$\operatorname{cotg}\gamma_{23} = -(\operatorname{cotg}\alpha_2 + \operatorname{cotg}\beta_3),$$
$$\operatorname{cotg}\gamma_{31} = -(\operatorname{cotg}\alpha_3 + \operatorname{cotg}\beta_1),$$

mit Rücksicht auf 49) und 50) die Gleichung:

$$\operatorname{cotg}\gamma_{12} + \operatorname{cotg}\gamma_{23} + \operatorname{cotg}\gamma_{31} = 0,$$

welche zeigt, dass die drei Punkte $\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}$ in einer Geraden liegen.

## §. 16.

### Tangenten der Neil'schen Parabel. Berührungs- und Tangentialpunkt.

Wir fanden in §. 11, dass die Gerade:

$$y = Ax + b, \text{ oder } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

Tangente der Neil'schen Parabel $x^3 - py^2 = 0$ ist, wenn zwischen dem Parameter p und den Constanten der Geraden die Beziehung:

52) $4pA^3 + 27b = 0$, oder $4pb^2 - 27a^3 = 0$

stattfindet. Wir können daher je eine dieser vier Constanten durch zwei andere ausdrücken; es ist:

$$p = -\frac{27b}{4A^3} = \frac{27a^3}{4b^2},$$

$$a = {}^4/_{27}\, pA^2 = {}^1/_3 \sqrt[3]{4b^2p},$$

$$b = -{}^4/_{27}\, pA^3 = \pm {}^3/_2\, a\sqrt{\frac{3a}{p}},$$

$$A = \mp {}^3/_2 \sqrt{\frac{3a}{p}} = -3\sqrt[3]{\frac{b}{4p}},$$

so dass die Gleichung der Tangente sich in folgenden Formen schreiben lässt:

53) $y = Ax - {}^4/_{27}\, pA^3,$

54) $y = -3x\sqrt[3]{\frac{b}{4p}} + b,$

55) $y = \mp {}^3/_2 \sqrt{\frac{3a}{p}}\,(x - a).$

Es folgt hieraus, dass sich in jeder Richtung, und durch jeden Punkt der y-Achse nur eine Tangente ziehen lässt, dass dagegen

durch jeden Punkt der positiven x-Achse ausser der Rückkehrtangente zwei Tangenten gezogen werden können.

Zur Bestimmung der gemeinschaftlichen Punkte der Neil'schen Parabel und ihrer Tangente setzen wir in die Gleichung der Neil'schen Parabel den Werth von y aus 53) oder 55) ein und erhalten für die Abscissen der Punkte die Gleichungen:

$$x^3 - p A^2 x^2 + {}^8/_{27} p^2 A^4 x - {}^{16}/_{729} p^3 A^6 = 0,$$
$$x^3 - {}^{27}/_4 a x^2 + {}^{27}/_2 a^2 x - {}^{27}/_4 a^3 = 0,$$

oder nach Zerlegung in Factoren:

$$(x - {}^4/_9 p A^2)^2 (x - {}^1/_9 p A^2) = 0,$$
$$(x - 3a)^2 (x - {}^3/_4 a) = 0.$$

Die Abscissen der gemeinschaftlichen Punkte sind also:

$$56) \quad \begin{cases} x_0 = x_0' = {}^4/_9 p A^2 = 3a = \sqrt[3]{4 p b^2}, \\ x_1 = {}^1/_9 p A^2 = {}^3/_4 a = {}^1/_4 \sqrt[3]{4 p b^2}. \end{cases}$$

Als zugehörige Werthe von y erhalten wir aus den Gleichungen der Tangente:

$$57) \quad \begin{cases} y_0 = y_0' = {}^8/_{27} p A^3 = -3a\sqrt{\frac{3a}{p}} = -2b, \\ y_1 = -{}^1/_{27} p A^3 = \pm {}^3/_8 a\sqrt{\frac{3a}{p}} = {}^1/_4 b. \end{cases}$$

Dieselben Werthe von y erhalten wir natürlich auch, wenn wir den Werth von x aus den Gleichungen der Tangente in die der Neil'schen Parabel einsetzen. So folgt z. B. aus 54) $x = {}^1/_3 (b - y)\sqrt[3]{\frac{4p}{b}}$, und daraus die Gleichung:

$$y^3 + {}^{15}/_4 b y^2 + 3 b^2 y - b^3 = 0,$$

oder

$$(y + 2b)^2 (y - {}^1/_4 b) = 0.$$

Die Gerade berührt also die Neil'sche Parabel in dem Punkte $x_0 y_0$, dessen Coordinaten durch 56) und 57) bestimmt sind, und welcher der Berührungspunkt der Tangente genannt wird. Ausserdem schneidet die Tangente die Neil'sche Parabel in noch einem Punkte $x_1 y_1$, welcher der zu dem Punkte $x_0 y_0$ gehörige Tangentialpunkt [9]) genannt wird. Zu jedem Berührungspunkt gehört **ein**, aber auch **nur ein** Tangentialpunkt. (Dass auch zu jedem Tangentialpunkt nur ein Berührungspunkt gehört, ist in §. 17 gezeigt.)

---

[9]) cf. Salmon, Höhere ebene Curven, Art. 150.
Durège, Curven dritter Ordnung, Art. 214.

Zwischen den Coordinaten eines Punktes $x_0\ y_0$ der Neil'schen Parabel und denen seines Tangentialpunktes $x_1\ y_1$ finden nach 56) und 57) die folgenden Beziehungen statt:

$$58)\quad x_1 = {}^1/_4\, x_0,\quad y_1 = -\,{}^1/_8\, y_0.$$

Ist $\varphi_0$ der Berührungspunkt und $\varphi_1$ sein Tangentialpunkt, so haben wir nach 40):

$$2\ \operatorname{cotg}\varphi_0 + \operatorname{cotg}\varphi_1 = 0,$$

wonach:

$$59)\quad \operatorname{cotg}\varphi_1 = -\,2\operatorname{cotg}\varphi_0,\quad \operatorname{tg}\varphi_1 = -\,{}^1/_2\operatorname{tg}\varphi_0$$

ist. Der Berührungspunkt und sein Tangentialpunkt liegen daher stets auf verschiedenen Zweigen der Neil'schen Parabel.

Aus den Gleichungen 56) und 57) ergeben sich die Werthe:

$$60)\quad A = \frac{3\,y_0}{2\,x_0},\quad a = {}^1/_3\, x_0,\quad b = -\,{}^1/_2\, y_0.$$

Die Gleichung der Tangente im (Berührungs-) Punkte $x_0\ y^0$ ist also:

$$61)\quad \begin{cases} y - y_0 = \dfrac{3\,y_0}{2\,x_0}\,(x - x_0) \text{ oder} \\ y = \dfrac{3\,y_0}{2\,x_0}\,x - {}^1/_2\, y_0, \text{ oder} \\ \dfrac{x}{{}^1/_3\, x_0} + \dfrac{y}{-\,{}^1/_2\, y_0} = 1. \end{cases}$$

Auch auf folgende Art erhalten wir die Gleichung der Tangente im Punkte $x_0\ y_0$. Nehmen wir noch einen zweiten Punkt der Neil'schen Parabel $x_0'\ y_0'$, so folgt aus den Gleichungen:

$$p\,y_0^{\,2} = x_0^{\,3},\quad p\,y_0'^{\,2} = x_0'^{\,3},$$

weiter: $p\,(y_0^{\,2} - y_0'^{\,2}) = x_0^{\,3} - x_0'^{\,3}$, also:

$$62)\quad \frac{y_0 - y_0'}{x_0 - x_0'} = \frac{x_0^{\,2} + x_0\,x_0' + x_0'^{\,2}}{p\,(y_0 + y_0')}.$$

Die Gleichung der durch beide Punkte gehenden Sekante ist also:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{x_0^{\,2} + x_0\,x_0' + x_0'^{\,2}}{p\,(y_0 + y_0')}.$$

Lassen wir den Punkt $x_0'\ y_0'$ mit $x_0\ y_0$ zusammenfallen, so wird die Gerade Tangente, und ihre Gleichung ist:

$$63)\quad y - y_0 = \frac{3\,x_0^{\,2}}{2\,p\,y_0}\,(x - x_0),$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichung $x_0^{\,3} = p\,y_0^{\,2}$ die Gleichung 61). *)

*) Da nach §. 4 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3\,x^2}{2\,p\,y} = \dfrac{3\,y}{2\,x}$, und die Gleichung der Tangente im Punkte $x_0\ y_0$ nach bekannten Gesetzen:

$$y - y_0 = \frac{dy}{dx}\,(x - x_0)$$

ist, so erhalten wir ebenfalls die Gleichungen 61) und 63).

Als Gleichung der Tangente im Punkte $\varphi_0$ erhalten wir:

64) $y = {}^3/_2\, x \operatorname{tg} \varphi_0 - {}^1/_2\, p \operatorname{tg}^3 \varphi_0.$

Zwischen den Coordinaten des Berührungspunktes und den Bestimmungsstücken der Tangente haben wir demnach folgende Beziehungen:

65)
$$\begin{cases}
x_0 = \sqrt[3]{p y_0^{\,2}} = p\operatorname{tg}^2\varphi_0 = {}^4/_9\, pA^2 = 3a = \sqrt[3]{4pb^2} \\
y_0 = \sqrt{\dfrac{x_0^{\,3}}{p}} = p\operatorname{tg}^3\varphi_0 = {}^8/_{27}\, pA^3 = 3a\sqrt{\dfrac{3a}{p}} = -2b \\
\operatorname{tg}\varphi_0 = \sqrt{\dfrac{x_0}{p}} = \sqrt[3]{\dfrac{y_0}{p}} = {}^2/_3\, A = \sqrt{\dfrac{3a}{p}} = -\sqrt[3]{\dfrac{2b}{p}} \\
A = {}^3/_2 \sqrt{\dfrac{x_0}{p}} = {}^3/_2 \sqrt[3]{\dfrac{y_0}{p}} = {}^3/_2 \operatorname{tg}\varphi_0 = {}^3/_2 \sqrt{\dfrac{3a}{p}} = -\sqrt[3]{\dfrac{b}{4p}} \\
a = {}^1/_3\, x_0 = {}^1/_3 \sqrt[3]{p y_0^{\,2}} = {}^1/_3\, p\operatorname{tg}^2\varphi_0 = {}^4/_{27}\, pA^2 = {}^1/_3 \sqrt[3]{4pb^2} \\
b = {}^1/_2 \sqrt{\dfrac{x_0^{\,3}}{p}} = -{}^1/_2\, y_0 = -{}^1/_2\, p\operatorname{tg}^3\varphi_0 = -{}^4/_{27}\, pA^3 = {}^3/_2\, a\sqrt{\dfrac{3a}{p}}.
\end{cases}$$

Die Vorzeichen der Quadratwurzeln der Ausdrücke mit $x_0$ und a werden durch die Vorzeichen von $y_0$ und A bestimmt.

---

## §. 17.

## Tangenten von einem Punkte an die Neil'sche Parabel.

Betrachten wir in den im vorigen Paragraphen gefundenen Gleichungen 53) bis 55) der Tangente die Constanten der Tangente als veränderliche Grössen, und nehmen f g als Coordinaten eines festen Punktes der Tangente an, so erhalten wir Gleichungen für die Bestimmungsstücke der von dem Punkte f g an die Neil'sche Parabel gezogenen Tangenten, wenn wir in den Gleichungen der Tangente f und g für x und y setzen.

Zur Bestimmung der Richtungsconstanten der durch den Punkt f g gezogenen Tangenten erhalten wir aus 53) die Gleichung:

66) . . . $4\,p\,A^3 - 27\,f\,A + 27\,g = 0,$

für die durch die Tangenten auf der x-Achse gebildeten Abschnitte aus 55):

67) . . . $a^3 - 2\,f\,a^2 + f^2\,a - {}^4/_{27}\,p\,g^2 = 0,$

für die Abschnitte auf der y-Achse aus 54):

68) . . . $b^3 - 3\,g\,b^2 + \left(3\,g^2 - \dfrac{27\,f^3}{4\,p}\right) b - g^3 = 0.$

Ebenso erhalten wir aus den Gleichungen 61) und 64) mit Berücksichtigung der Gleichung der Neil'schen Parabel, wenn wir f und g für x und y, sowie x, y und $\varphi$ für $x_0$, $y_0$ und $\varphi_0$ setzen, zur Bestimmung der Coordinaten x, y und $\varphi$ der Berührungspunkte der von dem Punkte f g an die Neil'sche Parabel gezogenen Tangenten die Gleichungen:

$$69) \ldots x^3 - 6fx^2 + 9f^2x - 4pg^2 = 0,$$

$$70) \ y^3 + 6gy^2 + \left(12g^2 - \frac{27f^3}{p}\right)y + 8g^3 = 0,$$

$$71) \ p\,tg^3\varphi - 3f\,tg\,\varphi + 2g = 0.$$

Alle diese Gleichungen, da sie sämmtlich vom dritten Grade sind, zeigen, dass im Allgemeinen von einem Punkte an die Neil'sche Parabel drei Tangenten gezogen werden können. Die Neil'sche Parabel ist also eine Curve dritter Klasse.

Zwischen den entsprechenden Wurzeln dieser Gleichungen finden die in 65) gegebenen Beziehungen statt. Am einfachsten sind die Gleichungen für A und tg $\varphi$. Die Wurzeln der Gleichung 71) liefert die Cardanische Formel in der Gestalt:

$$72) \ tg\,\varphi = \sqrt[3]{-\frac{g}{p} + \frac{g}{p}\sqrt{1 - \frac{f^3}{pg^2}}} + \sqrt[3]{-\frac{g}{p} - \frac{g}{p}\sqrt{1 - \frac{f^3}{pg^2}}}$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{g}{p}}\left\{\sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - \frac{f^3}{pg^2}}} + \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - \frac{f^3}{pg^2}}}\right\}.$$

Es folgt hieraus, dass die obigen sechs Gleichungen drei reelle verschiedene Wurzeln haben, wenn $pg^2 < f^3$ ist, dass sie drei reelle Wurzeln haben, unter denen zwei gleiche sind, wenn $pg^2 = f^3$ ist, und dass sie eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln haben, wenn $pg^2 > f^3$ ist.

Mit Rücksicht auf §. 10 ergiebt sich hieraus:

1) Von einem Punkte innerhalb der Neil'schen Parabel sind stets drei reelle verschiedene Tangenten an dieselbe möglich.

2) Von einem Punkte der Neil'schen Parabel selbst lassen sich drei Tangenten ziehen. Von diesen fallen jedoch zwei, welche die Curve in diesem Punkte berühren, in eine zusammen, welche wir die Tangente in dem (Berührungs-) Punkte nennen wollen; ihre Gleichung ist nach 61):

$$y = \frac{3g}{2f}x - \tfrac{1}{2}g.$$

Die dritte Tangente hat den gegebenen Punkt zum Tangentialpunkte; wir wollen sie die Tangente aus demselben nennen. Wir sehen also, dass zu jedem Tangentialpunkt auch nur ein Berührungspunkt gehört (§. 16.). Als Gleichung der aus dem Punkte f g der

Neil'schen Parabel gezogenen Tangente ergiebt sich aus den Gleichungen des vorigen Paragraphen:

$$73) \ldots y = -\frac{3g}{f}x + 4g.$$

3) Von einem Punkte ausserhalb der Neil'schen Parabel ist nur eine reelle Tangente an dieselbe möglich.

Bezeichnen wir die Wurzeln der Gleichungen 66) bis 71) durch Anfügung der Indices 1, 2, 3 an die Unbekannten, so erhalten wir aus denselben zwischen den Coordinaten f g des beliebigen Punktes einerseits, und den Bestimmungsstücken der von demselben gezogenen Tangenten und den Coordinaten ihrer Beziehungspunkte andererseits folgende Beziehungen:

$$74) \ldots \begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 0;\ A_1 A_2 A_3 = -\frac{27g}{4p}; \\ a_1 + a_2 + a_3 = 2f;\ a_1 a_2 a_3 = {}^4/_{27}\, p g^2; \\ b_1 + b_2 + b_3 = 3g;\ b_1 b_2 b_3 = g^3; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6f;\ x_1 x_2 x_3 = 4 p g^2; \\ y_1 + y_2 + y_3 = -6g;\ y_1 y_2 y_3 = -8 g^3; \\ \operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2 + \operatorname{tg}\varphi_3 = 0;\ \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}\varphi_3 = -\frac{2g}{p}. \end{cases}$$

Von diesen Gleichungen sind diejenigen, welche die Summe der Wurzeln enthalten, und von diesen besonders wieder die erste und letzte, sehr einfach. Aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2 + \operatorname{tg}\varphi_3 = 0$$

ergiebt sich auch noch folgende:

$$\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} + \frac{y_3}{x_3} = 0,$$

oder in anderer Form (vgl. §. 13):

$$\sqrt[3]{y_1} + \sqrt[3]{y_2} + \sqrt[3]{y_3} = 0.$$

Von den Ordinaten der Berührungspunkte der drei von einem Punkte innerhalb der Neil'schen Parabel an dieselbe gezogenen reellen Tangenten haben danach die beiden absolut kleineren dasselbe Vorzeichen, die absolut grösste das entgegengesetzte. Ist g positiv [resp. negativ], so sind die beiden absolut kleinsten Ordinaten positiv [resp. negativ], oder die beiden letzteren haben mit g stets gleiches Vorzeichen.

## §. 18.

## Fortgesetztes Tangentenziehen. [10])

Fig. 5. Zwischen den Coordinaten $x_0\ y_0$ eines Punktes $P_0$ der Neil'schen Parabel und denen seines Tangentialpunktes $x_1\ y_1$ fanden wir in §. 16 die Gleichungen:

$$75)\quad x_1 = {}^1/_4\, x_0,\ y_1 = -\,{}^1/_8\, y_0,\ \operatorname{tg}\varphi_1 = -\,{}^1/_2 \operatorname{tg}\varphi_0.$$

Ziehen wir in dem Punkte $x_1\ y_1$ (als Berührungspunkte) eine neue Tangente, so heisst deren Schnittpunkt $x_2\ y_2$ mit der Neil'schen Parabel (der Tangentialpunkt von $x_1\ y_1$) der zweite Tangentialpunkt von $x_0\ y_0$. Seine Coordinaten sind

$$76)\quad \begin{cases} x_2 = {}^1/_4\, x_1 = ({}^1/_4)^2\, x_0, \\ y_2 = -\,{}^1/_8\, y_1 = (-\,{}^1/_8)^2\, y_0, \\ \operatorname{tg}\varphi_2 = -\,{}^1/_2 \operatorname{tg}\varphi_1 = (-\,{}^1/_2)^2 \operatorname{tg}\varphi_0. \end{cases}$$

Setzen wir das Tangentenziehen fort, indem wir in dem Tangentialpunkte $x_2\ y_2$ wieder eine Tangente ziehen, so erhalten wir den dritten Tangentialpunkt $x_3\ y_3$ von $x_0\ y_0$ (den zweiten von $x_1\ y_1$, den ersten von $x_2\ y_2$), u. s. w. Für den $n^{\text{ten}}$ Tangentialpunkt $x_n\ y_n$ von $x_0\ y_0$ erhalten wir:

$$77)\quad \begin{cases} x_n = ({}^1/_4)^n\, x_0,\ y_n = (-\,{}^1/_8)^n\, y_0, \\ \operatorname{tg}\varphi_n = (-\,{}^1/_2)^n \operatorname{tg}\varphi_0;\ \operatorname{cotg}\varphi_n = (-\,2)^n \operatorname{cotg}\varphi_0. \end{cases}$$

Wie sich hieraus ergiebt, springt bei fortgesetztem Tangentenziehen der Tangentialpunkt stets von einem Zweige der Curve auf den andern über, wobei die absoluten Werthe der Coordinaten immer kleiner und kleiner werden. Der Tangentialpunkt nähert sich dem Rückkehrpunkt mehr und mehr als seiner Grenze, und im Rückkehrpunkt selbst fallen der Berührungs- und Tangentialpunkt zusammen.

Bezeichnen wir die Constanten der Tangente im Punkte $x_i\ y_i$ mit $A_i,\ a_i,\ b_i$, so ist die Gleichung der Tangente im Punkte $x_0\ y_0$:

$$y = A_0\, x + b_0$$

und nach 65):

$$78)\quad A_0 = \frac{3\, y_0}{2\, x_0} = {}^3/_2 \sqrt[3]{\frac{y_0}{p}} = {}^3/_2 \operatorname{tg}\varphi_0;\ a_0 = {}^1/_3\, x_0;\ b_0 = -\,{}^1/_2\, y_0 = -\,{}^1/_2\, p \operatorname{tg}^3\varphi_0.$$

Die Gleichung der Tangente im Punkte $x_1\ y_1$ ist $y = A_1\, x + b_1$, wenn $A_1 = \dfrac{3\, y_1}{2\, x_1}$, $a_1 = {}^1/_3\, x_1$, $b_1 = -\,{}^1/_2\, y_1$ ist. Wenn wir für $x_1\ y_1$ die Werthe aus 75) einsetzen, so erhalten wir die Werthe:

---

[10]) cf. Durège, Curven dritter Ordnung Art. 214.
— , Ueber fortgesetztes Tangentenziehen an Curven dritter Ordnung mit einem Doppel- oder Rückkehrpunkte.

$A_1 = -\frac{3\,y_0}{4\,x_0} = -\,{}^3/_4 \operatorname{tg}\varphi_0$, $a_1 = {}^1/_{12}\,x_0$, $b_1 = {}^1/_{16}\,y_0 = {}^1/_{16}\,p \operatorname{tg}^3\varphi_0$,

aus denen sich ergiebt, dass

79) $A_1 = (-\,{}^1/_2)\,A_0$; $a_1 = {}^1/_4\,a_0$, $b_1 = (-\,{}^1/_8)\,b_0$

ist. Für die Constanten der Gleichung der Tangente $y = A_2\,x + b_2$ im Punkte $x_2\,y_2$ erhalten wir:

80) $A_2 = (-\,{}^1/_2)^2\,A_0$; $a_2 = ({}^1/_4)^2\,a_0$; $b_2 = ({}^1/_8)^2\,b_0$.

Ebenso ergeben sich für die Tangente $y = A_n\,x + b_n$ im Punkte $x_n\,y_n$ die Werthe:

81) $A_n = (-\,{}^1/_2)^n\,A_0$, $a_n = ({}^1/_4)^n\,a_0$, $b_n = (-\,{}^1/_8)^n\,b_0$,

oder $A_n = (-\,{}^1/_2)^n \cdot {}^3/_2 \operatorname{tg}\varphi_0$, $b_n = -\,(-\,{}^1/_8)^n\,{}^1/_2\,p \operatorname{tg}^3\varphi_0$.

Die Tangenten nähern sich hiernach immer mehr und mehr der Rückkehrtangente als ihrer Grenze.

Gehen wir umgekehrt von dem Punkte $x_0\,y_0$ aus und ziehen aus demselben (als Tangentialpunkte) die Tangente, so wollen wir den zugehörigen Berührungspunkt mit $x'\,y'$ bezeichnen. Ziehen wir aus $x'\,y'$ eine neue Tangente, so können wir den neuen Berührungspunkt $x''\,y''$ den zweiten Berührungspunkt von $x_0\,y_0$ nennen. Fahren wir so fort, aus jedem Berührungspunkte eine Tangente zu ziehen, so erhalten wir den dritten, u. s. w., den $n^{ten}$ Berührungspunkt $x^{(n)}\,y^{(n)}$ von $x_0\,y_0$. Zur Bestimmung derselben haben wir:

$x' = 4\,x_0$, $y' = -\,8\,y_0$, $\operatorname{tg}\varphi' = -\,2\operatorname{tg}\varphi_0$, $\operatorname{cotg}\varphi' = -\,{}^1/_2\operatorname{cotg}\varphi_0$,

$x'' = 4^2 x_0$; $y'' = (-8)^2 y_0$, $\operatorname{tg}\varphi'' = (-2)^2 \operatorname{tg}\varphi_0$, $\operatorname{cotg}\varphi'' = (-\,{}^1/_2)^2 \operatorname{cotg}\varphi_0$,

. . . .

. . . .

. . . .

$x^{(n)} = 4^n x_0$, $y^{(n)} = (-8)^n y_0$, $\operatorname{tg}\varphi^{(n)} = (-2)^n \operatorname{tg}\varphi_0$, $\operatorname{cotg}\varphi^{(n)} = (-\,{}^1/_2)^n \operatorname{cotg}\varphi_0$.

Der Berührungspunkt geht also stets von einem Zweige der Curve auf den andern über und nähert sich mehr und mehr dem unendlich fernen Wendepunkte als seiner Grenze.

Die Constanten der Tangenten in den folgenden Berührungspunkten lassen sich leicht wieder durch $A_0$, $a_0$ und $b_0$ ausdrücken. Für die im Punkte $x^{(n)}\,y^{(n)}$ gezogene Tangente $y = A^{(n)}\,x + b^{(n)}$ ist:

$A^{(n)} = (-2)^n A_0 = (-2)^n \cdot {}^3/_2 \operatorname{tg}\varphi_0$; $a^{(n)} = 4^n a_0$; $b^{(n)} = (-8)^n b_0 = -(-8)^n\,{}^1/_2\,p \operatorname{tg}^3\varphi_0$.

Die Tangente nähert sich der Wendetangente und fällt im Unendlichen mit ihr zusammen, so dass im Wendepunkte, wie auch im Rückkehrpunkte Berührungs- und Tangentialpunkt zusammenfallen.

## §. 19.

## Begleiterin und begleitender Punkt einer Geraden.

Wenn eine beliebige Gerade $L_0$:

82) $y = A_0 x + b_0$

die Neil'sche Parabel in den drei Punkten $\alpha_0$, $\beta_0$, $\gamma_0$, schneidet, so gilt nach §. 13 die Gleichung:

83) $\operatorname{cotg} \alpha_0 + \operatorname{cotg} \beta_0 + \operatorname{cotg} \gamma_0 = 0.$

Ziehen wir in den drei Punkten die drei Tangenten, so schneidet jede die Neil'sche Parabel in dem Tangentialpunkte des entsprechenden Berührungspunktes. Sind dieselben resp. $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, so haben wir nach 59) die Gleichungen:

$\operatorname{cotg} \alpha_1 = -2 \operatorname{cotg} \alpha_0$, $\operatorname{cotg} \beta_1 = -2 \operatorname{cotg} \beta_0$, $\operatorname{cotg} \gamma_1 = -2 \operatorname{cotg} \gamma_0$, aus denen folgt:

84) $\operatorname{cotg} \alpha_1 + \operatorname{cotg} \beta_1 + \operatorname{cotg} \gamma_1 = 0,$

Die drei Tangentialpunkte von drei Punkten der Neil'schen Parabel welche in einer Geraden $L_0$ liegen, liegen wieder in einer Geraden $L_1$ ($y = A_1 x + b_1$), welche die Begleiterin [11]) von $L_0$ genannt wird. Der Schnittpunkt beider Geraden heisst der $L_0$ begleitende Punkt.

Da jedem (Berührungs-) Punkte der Neil'schen Parabel nur ein Tangentialpunkt entspricht, so hat jede Gerade nur eine Begleiterin.

Gehen wir umgekehrt von der Geraden $L_1$ aus, welche die Neil'sche Parabel in den Punkten $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ schneidet, und ziehen aus diesen die drei Tangenten mit den Berührungspunkten $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, so liegen dieselben ebenfalls in einer Geraden, und da zu jedem Tangentialpunkte nur ein Beziehungspunkt gehört, so giebt es nur eine Gerade $L_0$, zu welcher eine andere $L_1$ als Begleiterin gehört.

Ist die Gerade $L_0$ Tangente der Neil'schen Parabel, fallen also zwei Schnittpunkte, etwa $\beta_0$ mit $\alpha_0$, zusammen, so fallen die beiden Tangentialpunkte $\alpha_1$ und $\beta_1$ mit $\gamma_0$ zusammen. und der dritte $\gamma_1$ ist der Tangentialpunkt von $\gamma_0$ oder $\alpha_1$.

Die Begleiterin einer Tangente in dem Berührungspunkte $\alpha_0$ ist die Tangente im Tangentialpunkte $\alpha_1$, welcher auch der begleitende Punkt der ersten Tangente ist. Nur in diesem Falle kann der begleitende Punkt einer Geraden auf der Neil'schen Parabel liegen, da sonst die Gerade vier Punkte mit der Neil'schen Parabel gemein haben würde.

Für die Constanten der durch $\alpha_0$ $\beta_0$ gehenden Geraden $y = A_0 x + b_0$ erhalten wir mit Berücksichtigung von §. 16, 62, die Werthe:

$$A_0 = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_0 + \operatorname{tg} \alpha_0 \operatorname{tg} \beta_0 + \operatorname{tg}^2 \beta_0}{\operatorname{tg} \alpha_0 + \operatorname{tg} \beta_0},$$

---

[11]) Salmon, Höhere ebene Curven Art. 150.
Durège, Curven dritter Ordnung Art. 230.

$$b_0 = -\frac{p\,tg^2\alpha_0 \,.\, tg^2\beta_0}{tg\,\alpha_0 + tg\,\beta_0}.$$

Als Gleichung der durch die Tangentialpunkte $\alpha_1\ \beta_1$ gehenden Geraden $y = A_1\,x + b_1$ erhalten wir:

$$A_1 = \frac{tg^2\alpha_1 + tg\,\alpha_1\,tg\,\beta_1 + tg^2\beta_1}{tg\,\alpha_1 + tg\,\beta_1},$$

$$b_1 = -\frac{p\,tg^2\alpha_1 \,.\, tg^2\beta_1}{tg\,\alpha_1 + tg\,\beta_1},$$

oder, wenn wir für $tg\,\alpha_1$ und $tg\,\beta_1$ ihre Werthe $-\frac{1}{2}\,tg\,\alpha_0$, $-\frac{1}{2}\,tg\,\beta_0$ einsetzen:

85) $A_1 = -\frac{1}{2}\,A_0,\ b_1 = -\frac{1}{8}\,b_0,$

so dass die Gleichung der Begleiterin von

$$y = A_0\,x + b_0$$

ist: $$y = -\frac{1}{2}\,A_0 - \frac{1}{8}\,b_0.$$

Eine Gerade hat also stets eine reelle Begleiterin, auch dann, wenn sie die Neil'sche Parabel in einem reellen und zwei imaginären Punkten schneidet.

Analog, wie bei den Tangentialpunkten, können wir die Begleiterin $L_2$ von $L_1$ die zweite Begleiterin von $L_0$ nennen, welche die Gleichung $y = A_2\,x + b_2$ hat, worin

$$A_2 = (-\tfrac{1}{2})^2\,A_0,\ b_2 = (-\tfrac{1}{8})^2\,b_0.$$

Ebenso würde die $n^{te}$ Begleiterin von der Geraden $y = A_0\,x + b_0$ die Gleichung:

$$y = (-\tfrac{1}{2})^n\,A_0 + (-\tfrac{1}{8})^n\,b_0$$

haben.

Die Coordinaten des die Gerade $L_0$ begleitenden Punktes $x_{01}\ y_{01}$ erhalten wir aus den Gleichungen von $L_0$ und $L_1$, nämlich

86) $$x_{01} = -\frac{3\,b_0}{4\,A_0};\ y_{01} = \tfrac{1}{4}\,b_0.$$

Der begleitende Punkt von $L_1$ (oder der zweite begleitende Punkt von $L_0$) ist:

$$x_{12} = -\frac{3\,b_1}{4\,A_1} = \tfrac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3\,b_0}{4\,A_0}\right) = \tfrac{1}{4}\,x_{01},$$

$$y_{12} = \tfrac{1}{4}\,b_1 = (-\tfrac{1}{8})\,.\,\tfrac{1}{4}\,b_0 = -\tfrac{1}{8}\,y_{01}.$$

Der begleitende Punkt von $L_{n-1}$ (oder der $n^{te}$ begleitende Punkt von $L_0$) ist:

$$x_{(n-1),n} = (\tfrac{1}{4})^{n-1}\,x_{01},\ y_{(n-1),n} = (-\tfrac{1}{8})^{n-1}\,y_{01}.$$

Da

$$1 + \frac{4\,p\,A_n{}^3}{27\,b_n} = 1 + \frac{4\,p\,(-\tfrac{1}{2})^{3n}\,A_0{}^3}{27\,.\,(-\tfrac{1}{8})^n\,b_0} = 1 + \frac{4\,p\,A_0{}^3}{27\,b_0}$$

ist, dieser Werth somit für alle Begleiterinnen und die Gerade selbst unveränderlich ist, so folgt aus §. 11, dass eine Gerade und ihre

Begleiterinnen entweder sämmtlich drei reelle verschiedene Punkte mit der Neil'schen Parabel gemein haben, oder dass sie sämmtlich Tangenten der Neil'schen Parabel sind (vergl. auch den vorhergehenden §.), oder dass sie alle nur je einen reellen Punkt mit der Neil'schen Parabel gemein haben.

Da ferner

$$p\,y_{n-1,n}^2 - x_{n-1,n}^3 = (-\tfrac{1}{8})^{2(n-1)}\,p\,y_{01}^2 - (\tfrac{1}{4})^{3n-3}\,x_{01}^3$$
$$= (\tfrac{1}{2})^{6(n-1)}\,(p\,y_{01}^2 - x_{01}^3)$$

ist, dieser Ausdruck also sein Zeichen nicht ändert, so liegen die begleitenden Punkte einer Geraden entweder alle innerhalb, oder alle auf, oder alle ausserhalb der Neil'schen Parabel.

---

## §. 20.

## Normale der Neil'schen Parabel.

Aus der Gleichung der Tangente der Neil'schen Parabel im Punkte $x_1\ y_1$:

$$y - y_1 = \frac{3\,y_1}{2\,x_1}\,(x - x_1)$$

ergiebt sich als Gleichung der Normale in demselben Punkte:

$$87)\quad y - y_1 = -\frac{2\,x_1}{3\,y_1}\,(x - x_1),$$

oder

$$y = -\frac{2\,x_1}{3\,y_1}\,x + \frac{3\,y_1^2 + 2\,x_1^2}{3\,y_1}.$$

Um die Schnittpunkte der Normale mit der Neil'schen Parabel zu erhalten, setzen wir den Werth:

$$y = -\frac{2\,x_1}{3\,y_1}\,x + \frac{3\,y_1^2 + 2\,x_1^2}{3\,y_1},$$

also:

$$y^2 = \frac{1}{9\,y_1^2}\,[4\,x_1^2\,x^2 - 4\,x_1\,(3\,y_1^2 + 2\,x_1^2)\,x + (3\,y_1^2 + 2x_1^2)^2],$$

somit:

$$p\,y^2 = \frac{1}{9\,p\,y_1^2}\,[4\,p^2\,x_1^2\,x^2 - 4\,p\,x_1\,(3\,p\,y_1^2 + 2\,p\,x_1^2)\,x + (3\,p\,y_1^2 + 2\,p\,x_1^2)^2]$$

oder, da $p\,y_1^2 = x_1^3$ ist, den Werth:

$$p\,y^2 = \frac{1}{9\,x_1^3}\,[4\,p^2\,x_1^2\,x^2 - 4\,p\,x_1^3\,(3\,x_1 + 2\,p)\,x + x_1^4\,(3\,x_1 + 2\,p)^2]$$
$$= \frac{4\,p^2}{9\,x_1}\,x^2 - \tfrac{4}{9}\,p\,(3\,x_1 + 2\,p)\,x + x_1\,(x_1 + \tfrac{2}{3}\,p)^2$$

in die Gleichung der Neil'schen Parabel ein, so geht dieselbe über in:

$$88)\quad x^3 - \frac{4p^2}{9x_1}x^2 + {}^4/_9\,p(3x_1 + 2p)x - x_1(x_1 + {}^2/_3 p)^2 = 0.$$

Da $x_1$ eine Wurzel dieser Gleichung ist, so dividiren wir beide Seiten derselben durch $(x - x_1)$, und erhalten dadurch zur Bestimmung der andern beiden Schnittpunkte die Gleichung:

$$88\,a)\quad x^2 + \left(x_1 - \frac{4p^2}{9x_1}\right)x + (x_1 + {}^2/_3\,p)^2 = 0,$$

welche die beiden Wurzeln:

$$x = \frac{2p^2}{9x_1} - {}^1/_2 x_1 \pm \frac{1}{18x_1}\sqrt{-3^5 x_1^4 - 2^4 3^3 p x_1^3 - 2^3 . 3^3 p^2 x_1^2 + 2^4 p^4}$$

hat, welche wir nach Zerfällung der Grösse unter dem Wurzelzeichen in Factoren in folgender Form schreiben können:

$$89)\quad x = \frac{2p^2}{9x_1} - {}^1/_2\,x_1 \pm \frac{1}{2x_1}\sqrt{-3(x_1 - {}^2/_9\,p)(x_1 + {}^2/_3\,p)^3}.$$

Da $x_1$ stets positiv, also $-3(x_1 + {}^2/_3\,p)^3$ stets negativ ist, so hängt das Vorzeichen der Grösse unter dem Wurzelzeichen nur ab von $(x_1 - {}^2/_9\,p)$, und zwar folgt hieraus, dass die Gleichung 88 a) zwei reelle und verschiedene, oder zwei reelle und gleiche Wurzeln, oder zwei imaginäre Wurzeln hat, je nachdem $x_1 < {}^2/_9\,p$, oder $x_1 = {}^2/_9\,p$, oder $x_1 > {}^2/_9\,p$ ist.

Die Normale der Neil'schen Parabel im Punkte $x_1\,y_1$ schneidet daher die Curve noch in zwei verschiedenen Punkten, wenn $x_1 < {}^2/_9\,p$ ist.

Ist $90)\quad x_1 = {}^2/_9\,p,\ y_1 = \pm {}^2/_{27}\,p\sqrt{2},\ \operatorname{tg}\varphi_1 = \pm {}^1/_3\sqrt{2},$

so ist die Normale dieses Punktes gleichzeitig Tangente in dem Punkte:

$$91)\quad x_0 = \frac{2p^2}{2p} - {}^1/_9 p = p,\ y_0 = \mp {}^{16}/_{27}p\sqrt{2},\ \operatorname{tg}\varphi_0 = \mp {}^2/_3\sqrt{2}.$$

Ist $x_1 > {}^2/_9\,p$, so hat die Normale ausser ihrem Fusspunkte keinen reellen Punkt mit der Neil'schen Parabel gemein.

Da die Werthe $\operatorname{tg}\varphi_1$ und $\operatorname{tg}\varphi_0$ in 90) und 91) nicht von p abhängig sind, so ergiebt sich daraus der Satz:

Construirt man mehrere Neil'sche Parabeln mit demselben Rückkehrpunkte und derselben Achse, aber mit verschiedenen Parametern, so liegen diejenigen Punkte aller dieser Parabeln, deren Normalen gleichzeitig Tangenten in einem andern Punkte sind, auf den beiden Geraden:

$$y^2 = \operatorname{tg}^2\varphi_1 . x^2,\ \text{oder}\ y^2 = {}^2/_9\,x^2,$$

welche unter den Winkeln

$$\varphi_0 = \pm 25^0\,14'\,21,''\,8$$

gegen die Achse geneigt sind. Ebenso liegen auch diejenigen Punkte

aller Parabeln, deren Tangenten gleichzeitig Normalen im zugehörigen Tangentialpunkte sind, auf den beiden Geraden

$$y^2 = x^2 . \operatorname{tg}^2 \varphi_0, \text{ oder } y^2 = {}^8/_9\, x^2,$$

welche unter den Winkeln

$$\varphi_0 = \pm 43^0\, 18'\, 49,''\, 9$$

gegen die Achse geneigt sind.

Die Construction dieser Geraden ergiebt sich leicht aus der Bemerkung, dass

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = {}^1/_3 \sqrt{2} = \sqrt{2 : 3} = 1 : \sqrt{({}^3/_2)^2 + ({}^3/_2)^2}$$

ist, und dass

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \sqrt{{}^8/_9} = \sqrt{3^2 - 1^2 : 3} = 1 : \sqrt{({}^3/_4)^2 + ({}^3/_4)^2}$$

ist, wobei noch daran erinnert werden mag, dass der absolute Werth von $\operatorname{tg} \varphi_0$ das Doppelte des absoluten Werthes von $\operatorname{tg} \varphi_1$ ist.

Nach §. 3 sind die Punkte $x_0 = {}^8/_9\, p$, $y = \mp {}^{16}/_{27}\, p\sqrt{2}$ die gemeinschaftlichen Punkte der Apollonischen Parabel und ihrer Evolute.

Fig. 3. Die Normalen der Apollonischen Parabel in den Punkten H und I (Fig. 3), deren Abscissen gleich der doppelten Brennweite derselben sind, sind also (wie bekannt, Tangenten in M und L und) auch Normalen in den resp. Punkten S und R, deren Coordinaten $x_1 = {}^2/_9\, p$, $y_1 = \pm {}^2/_{27}\, p\sqrt{2}$ sind.

Als Gleichung dieser Tangenten der Neil'schen Parabel, welche in ihrem Tangentialpunkte Normalen sind, erhalten wir:

$$y - {}^{16}/_{27}\, p\sqrt{2}\, (x - {}^8/_9\, p)$$

oder

$$y = \pm x\sqrt{2} \mp {}^8/_{27}\, p\sqrt{2}.$$

Da die Richtungsconstanten dieser Tangenten von p unabhängig sind, so sind alle diese Tangenten-Normalen für dieselbe und parallele Achsen der Neil'schen Parabel (oder der Apollonischen Parabel) unter den Winkeln $\alpha = \pm 54^0\, 44'\, 8,''\, 2$ gegen die Achse geneigt.

Die Frage, wann die Tangente der Neil'schen Parabel gleichzeitig Normale im Tangentialpunkte ist, lässt sich auch auf folgende Weise beantworten.

Die Tangente im Punkte $x_0\, y^0$ ist:

$$y = \frac{3\, y_0}{2\, x_0}\, x - {}^1/_2\, y_0.$$

Die Normale im Tangentialpunkte $x_1\, y_1$ ist, nach Einführung der Werthe $x_1 = {}^1/_4\, x_0$, $y_1 = - {}^1/_8\, y_0$:

$$y = \frac{4\, x_0}{3\, y_0}\, x - \frac{3\, {y_0}^2 + 8\, {x_0}^2}{24\, y_0}.$$

Sollen beide Linien zusammenfallen, so müssen ihre Constanten gleich sein, d. h. es muss:

$$\frac{3\,y_0}{2\,x_0} = \frac{4\,x_0}{3\,y_0},$$

also $8\,x_0^{\,2} = 9\,y_0^{\,2}$, oder $8\,p\,x_0^{\,2} = 8\,p\,y_0^{\,2}$,
oder $8\,p\,x_0^{\,2} = 9\,x_0^{\,3}$, oder $x_0^{\,2}\,(x_0 - {}^8/_9\,p) = 0$
sein, woraus sich auch der obige Werth ergiebt.

---

## §. 21.

## Länge der Tangente und Normale, Subtangente und Subnormale. Construction der Tangenten.

Fig. 6. Ist $T = P_0\,A_0$ (Fig. 6) die Länge der Tangente im Punkte $P_0$ $(x_0\ y_0)$, so ist, da nach 65) $a = OA_0 = {}^1/_3\,x_0 = {}^1/_3\,OM_0$ ist, $A_0\,M_0 = {}^2/_3\,x_0$,

$$P_0\,A_0^{\,2} = A_0\,M_0^{\,2} + P_0\,M_0^{\,2}, \text{ also}$$

$$T = \sqrt{({}^2/_3\,x_0)^2 + y_0^{\,2}}.$$

Die Subtangente $T_s = A_0\,M_0$ ist

$$T_s = {}^2/_3\,x_0.$$

Die Subnormale $N_s = M_0\,N_0$ ist die dritte Proportionale zu $A_0\,M_0$ und $P_0\,M_0$, also:

$$N_s : y_0 = y_0 : {}^2/_3\,x_0,$$

$$N_s = \frac{3\,y_0^{\,2}}{2\,x_0}.$$

Die Länge der Normale $N = P_0\,N_0$ ist Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks $P_0\,M_0\,N_0$, also

$$N = \sqrt{y_0^{\,2} + N_s} = \sqrt{y_0^{\,2} + \frac{3\,y_0^{\,2}}{2\,x_0^{\,2}}},$$

oder $$N = \frac{y_0}{{}^2/_3\,x_0}\sqrt{({}^2/_3\,x_0)^2 + y_0^{\,2}},$$

also $$N : y_0 = T : T_s.$$

Aus §. 16 erhalten wir leichte Constructionen von Tangenten in und aus einem Punkte der Neil'schen Parabel.

Fig. 5. Soll die Tangente im Punkte $P_0$ (Fig. 5) mit den Coordinaten $x_0 = OM_0$, $y_0 = P_0\,M_0$ gezogen werden, so folgt aus 65) $a = {}^1/_3\,x_0$, dass $OA_0 = {}^1/_3\,OM_0$ zu machen, und $P_0\,A_0$ zu ziehen ist. Da ferner $b = -\,{}^1/_2\,y_0$, so erhalten wir ebenfalls die Tangente, wenn

wir $OB_0 = {}^1/_2\, P_0\, M_0$ machen und $P_0\, B_0$ ziehen. Zur Construction des Tangentialpunktes $P_1$ haben wir nach 58) und 59)

$$x_1 = {}^1/_2\, x_0,\ y_1 = -\,{}^1/_8\, y_0,\ \operatorname{tg} \varphi_1 = -\,{}^1/_2 \operatorname{tg} \varphi_0\,;$$

es ist daher $OM_1 = {}^1/_4\, OM_0$, $M_1\, P_1 = {}^1/_8\, P_0\, M_0$, also $M_1\, A_0 = {}^1/_{12}\, OM_0 = {}^1/_4\, OA_0$, ferner $P_1\, A_0 = {}^1/_4\, B_0\, A_0 = {}^1/_{12}\, B_0\, P_0 = {}^1/_8\, A_0\, P_0$. (Vergl. §. 2.)

Dieselben Formeln zeigen uns auch leichte Constructionen der Tangenten aus einem Punkte. Auch für das fortgesetzte Tangentenziehen ergeben sich leichte Constructionen aus den betreffenden Formeln des §. 18.

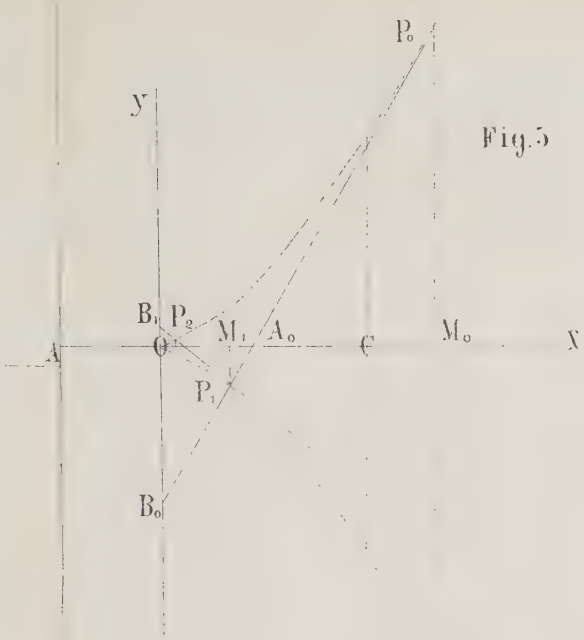


Fig.5

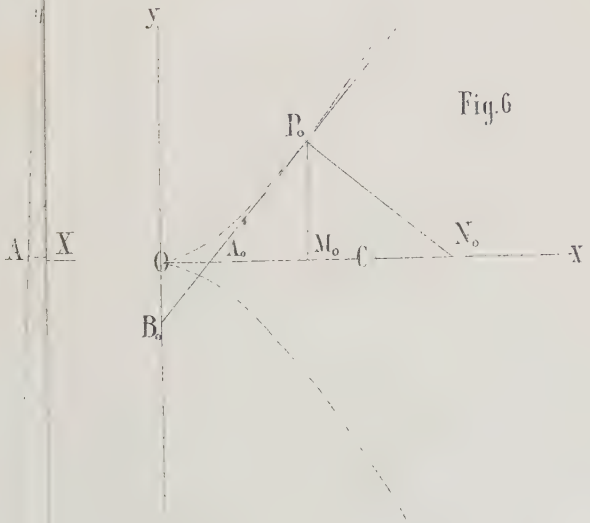


Fig.6